Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра Математической теории игр и статистических решений

Лонягина Юлия Евгеньевна

Магистерская диссертация

Модели конкуренции и кооперации многоуровневых сетей поставок

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук,

доцент

Зенкевич Н. А.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение 4

Обзор литературы 6

Содержательная постановка задачи 8

Глава 1. Конкуренция и кооперация в многоуровневых древовидных сетях поставок с линейным спросом 11

1.1. Модель многоуровневой древовидной сети поставок 11

1.2. Децентрализованное решение в многоуровневой древовидной цепи поставок 17

1.3. Кооперативное решение в централизованной многоуровневой древовидной сети поставок 24

1.4. Численный пример и сравнение решений 26

Глава 2. Конкуренция и кооперация в дистрибутивных сетях поставок 35

2.1. Децентрализованное решение в сетях поставок со сборочной структурой 35

2.2. Математическая формализация многоуровневых сетей поставок с дистрибутивной структурой 43

2.3. Децентрализованное решение в многоуровневой дистрибутивной сети поставок 46

2.4. Кооперативное решение в централизованной дистрибутивной многоуровневой сети 51

2.5. Численный пример и сравнение решений 53

Глава 3. Решение прикладных моделей сетей поставок в условиях конкуренции и кооперации 61

3.1. Модель древовидной сети поставок компании X 61

3.2. Модель дистрибутивной сети поставок компании У 69

Выводы 83

Список литературы 85

Приложения 87

Приложение 1 87

Приложение 2 89

Приложение 3 90

Введение

Операционное и промышленное моделирование, а также операционный менеджмент имеют давнюю историю, уходящую корнями к первой промышленной революции. Планирование производства, управление запасами, проектный менеджмент, контрольные диаграммы, статистические отчеты, опросники удовлетворенности клиентов, ранжирование и бенчмаркинг – вот лишь некоторые из инструментов, уже довольно давно используемых для улучшения операционной и промышленной деятельности. Но вместе с тем, как росли масштаб и сложность цепочек поставок, существенно усложнялись логистические и операционные проблемы, и традиционные инструменты, в свою очередь, уже не могли покрыть весь спектр возникающих задач. Это привело к необходимости разработки новых методов управления, а также более комплексных подходов к моделированию: все чаще ощущалась потребность в комбинировании инструментария математического моделирования и экономических реалий в сфере сетей поставок, действующих в глобальном масштабе.

Сегодня сети поставок являются неотъемлемым компонентом торговых отношений и оказывают огромное влияние на корпоративные выживаемость и развитие. Именно поэтому плохо реализованная операционная деятельность чаще всего приводит к значительным убыткам и нереализованной прибыли. Таким образом, принимая во внимание этот факт, а также увеличившуюся сложность структуры сетей поставок, глобализацию и возможность кооперации, можно заключить, что исследование вопросов конкуренции и кооперации в сетях поставок является очень актуальной задачей.

Целью данной работы является моделирование многоуровневых сетей поставок дистрибутивного типа, изучение моделей конкуренции и кооперации в сетях поставок, нахождение решений и сравнение результатов моделирования на кейсах реальных компаний. В работе исследованы несколько структур сетей поставок. Первая глава диссертации посвящена сетям поставок с древовидной структурой. Во второй главе проанализированы сети со сборочной и дистрибутивной структурами. Каждая из перечисленных моделей математически формализуется с помощью иерархической игры специального вида, для которой строится равновесное решение Нэша в условиях конкуренции между участниками сети поставок. Для каждой из рассмотренных структур вычисляется кооперативное решение в форме взвешенного арбитражного решения Нэша, где в качестве точки статус-кво рассматривается равновесное решение. Для каждой из структур сетей поставок приводится численный пример сети поставок, на котором иллюстрируются алгоритмы построения решений, и проводится сравнение результатов моделирования.

В третьей главе данной работы приведены результаты применения разработанной методологии анализа сетей поставок для прикладных задач. В первом параграфе анализируется сеть поставок компании X – производителя целлюлозно-бумажной продукции, во втором – сеть поставок дистрибьютора У электро-технических товаров и комплектующих. В заключение приведены выводы по результатам работы и список использованной литературы.

Обзор литературы

Сети поставок встречаются во всех сферах торговли и бизнеса, и этот факт делает их одним из самых популярных объектов изучения многих экономистов и ученых. Впервые ввела такое понятие как менеджмент сетей поставок, а также рассмотрела задачу управления цепочками поставок как концепцию, заключающуюся в интегрированном подходе к планированию и управлению услугами информационными и товарными потоками, аналитик консалтинговой компании «Буз Аллен Гамильтон» Кейт Оливер [8] в 1982 году. Концепция была быстро принята и получила широкое распространение и развитие.

Первые работы по менеджменту сетей поставок были посвящены изучению децентрализованных моделей, т.е. таких сетей поставок, в которых участники действуют независимо друг от друга. Примером таких работ могут служить статьи Зисса С. [14], Викерса Д. [11] и Тьяги Р. К. [10].

Позднее ученых заинтересовала кооперация участников сети и управление рисками. Кахон Г.П. [3] в своих работах исследовал вопрос влияния координирующих контрактов, а Кайя М. и Озер О. [7] – контрактирование сети для дележа рисков, прибыли и информации. Одновременно с темой кооперации также продолжало развиваться направление, связанное с изучением конкуренции в децентрализованной модели сети поставок. Например, работа Адиды Е. и ДеМигеля В. [1] посвящена вопросами конкуренции с уклоном в исследование влияния дифференциации товаров и потребителей.

Моделирование многоуровневых сетей поставок началось относительно недавно. Пионерами этой темы были Корбетт Ч. и Кармаркар У. [6], смоделировав конкуренцию в многоуровневых сетях с заданным спросом. Позже, Карр С. в соавторстве с Кармаркаром У. [4] опубликовали работу, в которой была исследована модель конкуренции в многоуровневой сети поставок со сборочной структурой. Одними из последних работ, посвященных моделированию многоуровневых сетей поставок, являются исследование Чо С.-Х. [5], изучающее горизонтальную кооперацию в многоуровневых сетях поставок, и статья Жоу Д., Кармаркара У. и Джанга Б. [13], которая является обобщением работы [4] на случай дистрибутивной структуры сети поставок и изучает вопросы координации децентрализованной сети, влияния изменения концентрации участников и вида функции спроса.

Модели сетей поставок, исследованные в данной работе, основаны на модели Жоу Д., Кармаркара У. и Джанга Б. [13], которая обобщена на случай произвольных фирм, и модели Карра С. и Кармаркара У. [4], которая также обобщена на случай произвольных фирм. В работе обе модели [4] и [13] обобщены на случай произвольной дистрибутивной сети поставок. Кроме того, результаты исследования вопросов конкуренции и кооперации в многоуровневых сетях поставок опубликованы в статье [12], а результаты анализа практических кейсов компаний опубликованы в работах [9] и [2].

Содержательная постановка задачи

Пусть задана многоуровневая сеть поставок с одной из следующих структур:

- древовидная (Рис. 1)

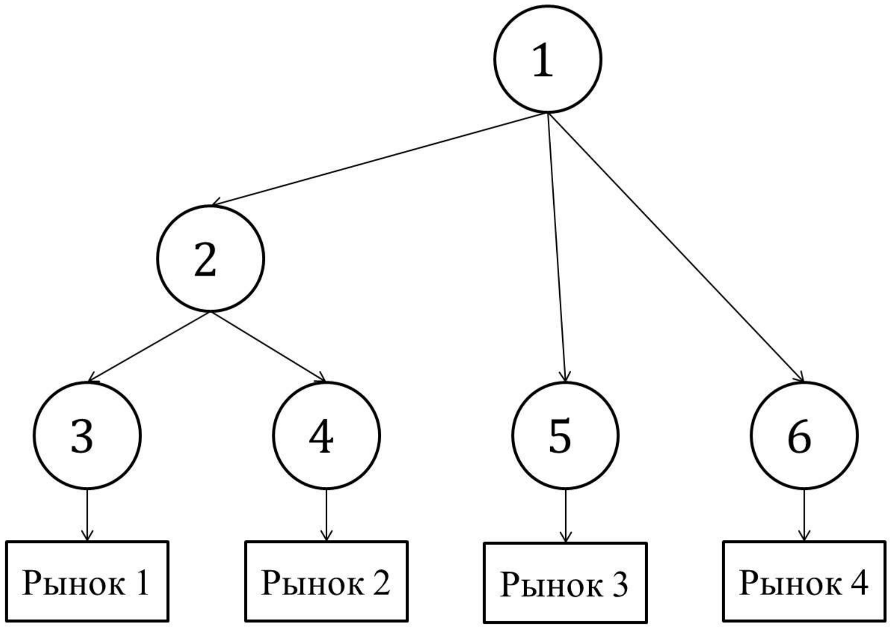

Рис. 1. Пример сети поставок с древовидной структурой.

- сборочная (Рис 2)

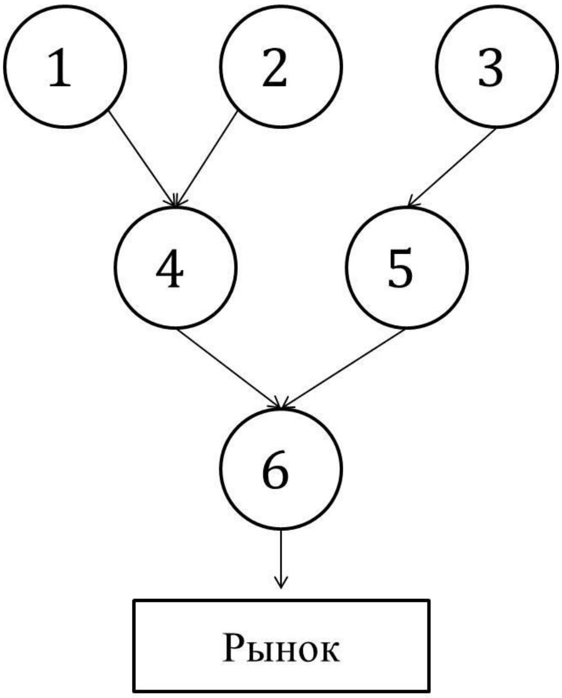

Рис. 2. Пример сети поставок со сборочной структурой.

- дистрибутивная (Рис. 3)

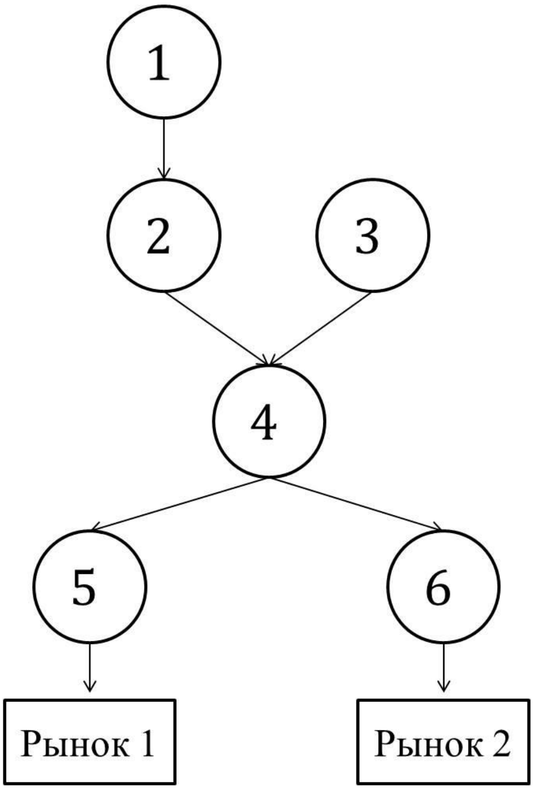

Рис. 3. Пример сети поставок с дистрибутивной структурой.

Пусть каждая вершина сети поставок представляет собой множество конкурирующих фирм, производящих однородный продукт на основе одного и того же исходного ресурса или набора ресурсов. Переменные издержки фирм могут быть различными, но являются известными параметрами сети. Количество фирм в каждой вершине – также известные параметры. Предполагается, что фирмы, находящиеся в одной вершине, продают продукт по одинаковой цене.

В задаче также предполагается, что потребительские рынки, на которых концевые вершины реализуют конечный продукт, не конкурируют между собой и функционируют по модели Курно с линейной функцией спроса и фиксированными переменными издержками.

С учетом сформулированных выше предположений, задача заключается в разработке и реализации алгоритма нахождения такого набора допустимых значений объемов производства и цен всех участников сети поставок, когда каждый участник стремится максимизировать свою прибыль в условиях конфликта интересов сторон. При этом рассматривается две возможные модели поведения:

- Все участники принимают решения независимо друг от друга в условиях конкуренции,
- Все участники кооперируются с целью достижения общего результата (например, максимизации прибыли сети поставок в целом).

Глава 1. Конкуренция и кооперация в многоуровневых древовидных сетях поставок с линейным спросом

1.1. Модель многоуровневой древовидной сети поставок

Пусть множество X – заданное конечное множество вершин сети.

Определение 1. Правило f, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ единственный элемент $f(x) \in X$, называется однозначным отображением X в X или функцией f, определенной на X со значениями в X.

Определение 2. Многозначным отображением F множества X в X будем называть правило, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ заданное подмножество $F(x) \subset X$.

В дальнейшем будем предполагать, что $F(\emptyset) = \emptyset$.

Далее под термином «отображение» F из X в X будем понимать «многозначное отображение» F [15].

Пусть F – отображение X в X, и $A \subset X$.

Определение 3. Под образом множества $A \subset X$ при отображении F будем понимать множество $F(A) \triangleq \bigcup_{x \in A} F(x)$.

Из определения 3 следует, что всех множеств $A_i \subset X, i = 1, \ldots, n$ имеют место свойства:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} F(A_i), \qquad F\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} F(A_i).$$

Определим отображения $F^1, F^2, \ldots, F^k, \ldots$ для отображения F следующим итеративным образом:

$$F^1(x) = F(x), \qquad F^2(x) \triangleq F\big(F(x)\big),$$

$$F^3(x) \triangleq F\big(F^2(x)\big), \qquad \ldots \quad , F^k(x) \triangleq F(F^{k-1}(x)), \ldots$$

Определение 4. Отображение $\hat{F}$ множества X в X называется *транзитивным замыканием* отображения F, если

$$\hat{F}(x) \triangleq \{x\} \cup F^1(x) \cup F^2(x) \cup \ldots \cup F^k(x) \ldots \ .$$

Иными словами, $\hat{F}(x)$ – это множество вершин графа, в которые можно попасть из вершины x каким-либо способом.

Отображение F^{-1}, обратное отображению F, определяется естественным образом как

$$F^{-1}(y) \triangleq \{x | y \in F(x)\}.$$

Аналогично отображению F^{k} определяется отображение F^{-k} следующим образом:

$$F^{-2}(y) = F^{-1}(F^{-1}(y)),$$

$$F^{-3}(y) = F^{-1}\left(F^{-2}(y)\right), \dots, F^{-k}(y) = F^{-1}\left(F^{-(k-1)}(y)\right).$$

Если $B \subset X$, то полагаем $F^{-1}(B) \triangleq \{x | F(x) \cap B \neq \emptyset\}$.

Определение 5. Пару (X, F) будем называть *графом*, если X – некоторое заданное конечное множество вершин, а F – заданное отображение X в X. В дальнейшем граф (X, F) будем обозначать символом G [15].

Элементы множества X графически будем изображать кругами на плоскости, а пару элементов (x, y), для которых $y \in F(x)$, изображать направленным отрезком от x к y.

Каждый элемент x множества X будем называть *вершиной* графа, а пару элементов (x, y), такую что $y \in F(x)$ – *дугой* графа p. Для дуги $p = (x, y)$ вершины x и y являются *граничными*, при этом x – *начало дуги*, а y – её *конец*. Две дуги p и q называются *смежными*, если $p \neq q$ и они имеют общую граничную вершину. Множество всех дуг графа будем обозначать через P.

Ребром графа будем называть множество из двух элементов $x, y \in X$, для которых или $(x, y) \in P$ или $(y, x) \in P$. В ребре, в отличие от дуги, ориентация роли не играет.

Под *цепью* будем понимать такую последовательность ребер $(q_1, q_2, \dots)$, в которой у каждого ребра q_k одна из граничных вершин является также граничной для q_{k-1}, а другая – граничной для q_{k+1}.

Граф будем называть *связным*, если любые две его вершины можно соединить цепью.

Цикл – это конечная цепь, начинающаяся в некоторой вершине и оканчивающаяся в той же вершине. Частным случаем цикла является петля, когда $x \in F(x)$.

Определение 6. Дерево или *древовидный граф* $G = (X, F)$ – это конечный связный граф без циклов, имеющий не менее двух вершин и в котором существует единственная вершина x^1, такая что $\hat{F}(x^1) = X$. Вершина x^1 называется *начальной или корневой* вершиной графа G [15].

Рассмотрим древовидный граф $G = (X, F)$, заданный конечным множеством вершин X и функцией альтернатив F, с корневой вершиной $x^1 \in X$. Пусть $\bar{X} = \{x \in X | F(x) = \emptyset\}$ – заданное множество концевых вершин графа G. Тогда множество $X \backslash \bar{X}$ будем называть множеством промежуточных вершин. На множестве вершин X зададим множества $X_1, \dots, X_l \subset X$ следующим образом:

$$X_1 = \{x^1\};$$

$$X_{k+1} = \cup_{x \in X_k} (F(x) \backslash \bar{X}), \quad \text{если } X_{k+1} \neq \emptyset, k = \overline{1, l-2}; \qquad (1.1.1)$$

$$X_l = \bar{X}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что множества $\{X_i\}_{i=1}^{l}$ задают разбиение множества вершин X связного древовидного графа G, т.е.

$$\bigcup_{i=1}^{l} X_i = X, X_e \cap X_r = \emptyset, e \neq r.$$

Определение 7. Подмножество вершин $X_i \subset X, i = 1, \dots, l$ будем называть *множеством вершин уровня* i.

Используя введенное разбиение (1.1.1), обозначим вершины множества X следующим образом: x_j^i, где верхний индекс соответствует уровню множества X_i, которому принадлежит эта вершина, а нижний – порядковому номеру этой вершины в множестве X_i. В частности, корневую вершину x^1 обозначим через x_1^1. Обозначим через m_i количество вершин уровня i, т.е. $m_i = |X_i|$, где $|X_i|$ – мощность множества X_i.

Определение 8. Будем говорить, что разбиение $X_1, \dots, X_l$ множества вершин X, определенное по правилу (1.1.1), задает сеть поставок с древовидной структурой G.

Определение 9. *Сектором* вершины $x_j^i \in X \backslash X_l$ будем называть множество альтернатив $F(x_j^i)$.

Определение 10. Через множество S_j^i обозначим множество пар индексов вершин, которые входят в сектор вершины $x_j^i \in X \backslash X_l$, т.е.

$$S_j^i = \{(k, h) \mid x_h^k \in F(x_j^i)\}.$$

Замечание. Заметим, что по построению $S_j^i \neq \emptyset, \ \forall i, j$.

Будем считать, что каждая вершина $x_j^i, \ i = \overline{1, l}, \ j = \overline{1, m_l}$ сети поставок состоит из конечной совокупности элементов $\{x_{jk}^i\}_{k=1}^{n_{ij}}$, где n_{ij} – количество элементов совокупности. Для каждого элемента совокупности также определено число $v_{ijk} \geq 0$. Данная совокупность элементов $\{x_{jk}^i\}_{k=1}^{n_{ij}}$содержательно является группой конкурирующих фирм, производящих однородный продукт на основе однородного ресурса с предельными затратами v_{ijk} и неограниченной мощностью производства.

Для каждой фирмы x_{jk}^i введем переменную $q_{ijk} \geq 0$, которая характеризует переменный объем выпуска этой фирмы. Общий объем продукта, произведенный фирмами $\{x_{jk}^i\}_{k=1}^{n_{ij}}$ в вершине x_j^i, обозначим через $Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk}$. В рамках данной работы мы будем предполагать, что для сектора каждой вершины $x_j^i \in X \backslash X_l$ цепи поставок выполнено условие:

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk} = \sum_{r,h:(r,h) \in S_j^i} Q_{rh} = \sum_{r,h:(r,h) \in S_j^i} \sum_{t=1}^{n_{rh}} q_{rht}. \qquad (1.1.2)$$

Условие (1.1.2) содержательно означает, что в сети поставок нет дефицита и излишков производства.

Для каждой вершины $x_j^i \in X$ введем переменную p_{ij}, характеризующую цену, по которой фирмы из этой вершины продают единицу производимой продукции при объеме выпуска Q_{ij}. При этом будем предполагать, что каждая концевая вершина $x_j^l \in X_l$ характеризуется линейной функцией спроса вида

$$p_{lj} = a_{lj} - b_{lj} Q_{lj}, \qquad (1.1.3)$$

где $a_{lj} > 0, b_{lj} > 0$ – заданные параметры. Содержательно предположение (1.1.3) означает, что концевые вершины реализуют свой продукт на неконкурирующих потребительский рынках, функционирующих по модели Курно с функцией спроса (1.1.3).

Определение 11. Набор значений $\left(\{q_{ijk}\}_{i,j,k}, \{p_{ij}\}_{i,j}\right)$ будем называть *потоком* d *в сети поставок*.

Определение 12. Поток d будем называть *допустимым*, если выполнены условия (1.1.2) и (1.1.3) и

$$p_{ij} \geq 0, Q_{ij} \geq 0, \qquad i = \overline{1,l} \;\; j = \overline{1,m_l}.$$

Множество всех допустимых потоков в сети поставок будем обозначать через D.

Для каждой фирмы $x_{jk}^i \in x_j^i,\ i = \overline{1,l}, j = \overline{1,m_\iota}$ определим её функцию прибыли π_{ijk} на множестве D следующим образом:

$$\pi_{ijk}(d) = \begin{cases} q_{ijk}(p_{i1} - v_{ijk}), & \text{если } i = j = 1; \\ q_{ijk}(a_{ij} - b_{ij}Q_{ij} - p_{rh} - v_{ijk}), & \text{если } i = l; \\ q_{ijk}(p_{ij} - p_{rh} - v_{ijk}), & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

где $p_{rh}\colon (i,j) \in S_h^r$.

Далее в рамках главы мы будем рассматривать две возможных модели взаимодействия участников сети поставок. В первой модели предполагается, что все участники цепи поставок действуют независимо друг от друга, преследуя только личную выгоду, т.е. конкурируют между собой. Такую модель будем называть *децентрализованной*. Вторая модель взаимодействия предполагает, что все участники цепи объединяются в максимальную коалицию для максимизации общей прибыли сети поставок, т.е. кооперируются. Данную модель мы будем называть *централизованной* моделью.

Наша задача в рамках этой главы состоит в том, чтобы на основании теоретико-игровой модели взаимодействия участников сети сформулировать критерий оптимальности потока и найти допустимый поток $d \in D$, который удовлетворяет данному принципу оптимальности. В следующем параграфе мы рассмотрим децентрализованную модель, а в параграфе 1.3 – централизованную.

1.2. Децентрализованное решение в многоуровневой древовидной цепи поставок

Пусть задана многоуровневая древовидная сеть поставок $G = (X, F)$ с децентрализованной моделью поведения участников. Множество вершин X сети поставок упорядочим согласно следующему правилу: на первом месте корневая вершина, затем вершины второго уровня по возрастанию порядковых номеров, потом – третьего, и так далее. Таким образом, мы получаем упорядоченный набор $\{x_1^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{m_l}^l\}$, обозначим его N. Множество N будем считать множеством игроков. Также соответственно упорядочению множества игроков составим вектор-функцию выигрышей игроков: $H = \left\{\{H_l\}_{l\in N} \mid H_l = \{\pi_{ijk}\}_{k=1}^{m_{ij}}\right\}$.

Множеством U_{ij} стратегий игрока x_j^i будем считать множество всевозможных векторов $u_{ij} \in D$, где u_{ij} – это вектор, составленный из упорядоченного набора переменных, определенных для всех фирм $\{x_{jk}^i\}_{k=1}^{n_{ij}} \in x_j^i$ и лежащих в пределах области, задающей допустимый поток, т.е.

$$U_{ij} = \left[\begin{array}{l} \left\{u_{ij} = \left(q_{ij1}, \dots, q_{ijn_{ij}}, p_{ij}\right) \in D\right\}, \text{для } x_j^i \in N, i = \overline{1, l-1}, j = \overline{1, m_i}; \\ \left\{u_{lj} = \left(q_{lj1}, \dots, q_{ljn_{lj}}\right) \in D\right\}, \text{для } x_j^l \in N, j = \overline{1, m_l}. \end{array}\right. \qquad (1.2.1)$$

Определение 13. Допустимый поток d^*, порожденный стратегией u^*, будем называть *равновесием по Нэшу* в децентрализованной сети поставок, если выполняется неравенство

$$\pi_{ijk}(d^*) \geq \pi_{ijk}\left(d^{ij}\right), \qquad i = \overline{1, l}, j = \overline{1, m_\iota}, k = \overline{1, n_{\iota j}}, \qquad (1.2.2)$$

где d^{ij} – это поток, порожденный стратегией $u^{ij} = (u_{11}^*, \dots, u_{ij}, \dots u_{lm_l}^*)$, где u_{ij} – стратегия игрока x_j^i.

Опишем теперь процедуру нахождения равновесия по Нэшу в децентрализованной модели многоуровневой сети поставок с древовидной структурой:

Шаг 1. Корневая вершина определяет цену, по которой она продает товар вершинам своего сектора.

Шаг 2. Вершины второго уровня сети поставок, получив информацию, назначают цену товара вершинам своего сектора. Далее процедура повторяется до вершин предпоследнего уровня включительно.

Шаг 3. Концевые вершины на основе цен, полученных от своих поставщиков, и функций спроса определяют объемы выпуска товара на рынок.

Шаг 4. На основе конкуренции происходит процедура распределения объемов между фирмами в каждой из вершин конечного уровня.

Шаг 5. Информация об объемах последовательно поступает на вершины верхних уровней, и внутри каждой на основе конкуренции происходит процедура распределения объемов между фирмами.

Шаг 6. Подсчет прибыли каждого из участников сети поставок.

Такой процесс принятия решения характеризует децентрализованную многоуровневую древовидную сеть поставок как конфликтно-управляемую систему с иерархической структурой, потому как именно такие системы определяются последовательностью уровней управления, следующих друг за другом в порядке установленного приоритета. Рассмотрим тогда неантагонистическую многошаговую игру Γ с иерархической структурой и полной информацией: $\Gamma = \langle N, \{U_l\}_{l \in N}, H \rangle$. Тогда поток d^*, введенный в определении 13, является, таким образом, абсолютным равновесием по Нэшу в игре Γ.

Построение равновесия начнем с концевых вершин. Рассмотрим функцию прибыли фирмы k из вершины x_j^l:

$$\pi_{ljk} = q_{ljk}\left(p_{lj} - p_{it} - v_{ljk}\right), \qquad p_{it}\colon (l, j) \in S_t^i. \tag{1.2.3}$$

Подставим в формулу прибыли (1.2.3) выражение для переменной p_{lj}, используя функцию спроса (1.1.3):

$$\pi_{ljk} = q_{ljk}\left(a_{lj} - b_{lj}Q_{lj} - p_{it} - v_{ljk}\right), \tag{1.2.4}$$

и применим необходимое условие максимума (1.2.5):

$$\frac{\partial \pi_{ljk}}{\partial q_{ljk}} = 0, \qquad k = \overline{1, n_{lj}}. \tag{1.2.5}$$

Проделав (1.2.3) – (1.2.5) для всех $k = \overline{1, n_{ll}}$ мы получим систему (1.2.6):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} q_{lj1} \\ q_{lj2} \\ \vdots \\ q_{ljn_{lj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{lj1}\right) \\ \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{lj2}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{ljn_{lj}}\right) \end{pmatrix}. \tag{1.2.6}$$

Эта система имеет невырожденную матрицу, поэтому её можно однозначно разрешить относительно переменных $q_{ljk}, k = \overline{1, n_{lj}}$, и единственное решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} q_{lj1} \\ q_{lj2} \\ \vdots \\ q_{ljn_{lj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_{lj}}{n_{lj}+1} & \frac{-1}{n_{lj}+1} & \cdots & \frac{-1}{n_{lj}+1} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n_{lj}+1} & \frac{-1}{n_{lj}+1} & \cdots & \frac{n_{lj}}{n_{lj}+1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{lj1}\right) \\ \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{lj2}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{lj}}\left(a_{lj} - p_{it} - v_{ljn_{lj}}\right) \end{pmatrix},$$

или после перемножения вид (1.2.7):

$$\begin{pmatrix} q_{lj1} \\ q_{lj2} \\ \vdots \\ q_{ljn_{lj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{lj}(n_{lj}+1)}\left(a_{lj} - \left(p_{it} + n_{lj}v_{lj1} - \sum_{h=2}^{n_{lj}} v_{ljh}\right)\right) \\ \frac{1}{b_{lj}(n_{lj}+1)}\left(a_{lj} - \left(p_{it} + n_{lj}v_{lj2} - \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq 2}}^{n_{lj}} v_{ljh}\right)\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{lj}(n_{lj}+1)}\left(a_{lj} - \left(p_{it} + n_{lj}v_{ljn_{lj}} - \sum_{h=1}^{n_{lj}-1} v_{ljh}\right)\right) \end{pmatrix}. \qquad (1.2.7)$$

Для вершины x_j^lтакже имеет место равенство (1.2.8)

$$Q_{lj} = \sum_{k=1}^{n_{lj}} q_{ljk} = \frac{n_{lj}(a_{lj} - p_{it}) - \sum_{k=1}^{n_{lj}} v_{ljk}}{b_{lj}\left(n_{lj}+1\right)}. \qquad (1.2.8)$$

Процедуры (1.2.3) – (1.2.8) аналогично проделываем для всех концевых вершин $x_j^l \in X_l$.

Теперь рассмотрим фирму k из x_j^{l-1}. Её функция прибыли имеет вид:

$$\pi_{(l-1)jk} = q_{(l-1)jk}\left(p_{(l-1)j} - p_{it} - v_{(l-1)jk}\right), \qquad k = \overline{1, n_{(l-1)j}}, \qquad (1.2.9)$$

где p_{it}: $(l-1, j) \in S_t^i$.

В виду того, что вершина $x_j^{(l-1)}$ образует сектор, то из условия отсутствия излишков и дефицита (1.1.2) имеем соотношение

$$\sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} = Q_{(l-1)j} = \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} Q_{lh} =$$

$$= \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}\left(a_{lh} - p_{(l-1)j}\right) - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr}}{b_{lh}(n_{lh}+1)},$$

используя которое можно однозначно выразить переменную $p_{(l-1)j}$:

$$p_{(l-1)j} = f_{(l-1)j}\left(q_{(l-1)j1}, \dots, q_{(l-1)jn_{(l-1)j}}\right) = \qquad (1.2.10)$$

$$= \frac{-\sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} + \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}a_{lh} - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr}}{b_{lh}(n_{lh}+1)}}{\sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}}{b_{lh}(n_{lh}+1)}}.$$

Подставим (1.2.10) в формулы прибыли (1.2.9)

$$\pi_{(l-1)jk} = q_{(l-1)jk}\left(f_{(l-1)j} - p_{it} - v_{(l-1)jk}\right), \qquad k = \overline{1, n_{(l-1)j}}, \qquad (1.2.11)$$

и применим необходимое условие максимума к выражениям (1.2.11):

$$\frac{\partial \pi_{(l-1)jk}}{\partial q_{(l-1)jk}} = \left(f_{(l-1)j} - p_{it} - v_{(l-1)jk}\right) +$$

$$+q_{(l-1)jk} \frac{-1}{\sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}}{b_{lh}(n_{lh}+1)}} = 0, \qquad k = \overline{1, n_{(l-1)j}}.$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} q_{(l-1)j1} \\ q_{(l-1)j2} \\ \vdots \\ q_{(l-1)jn_{(l-1)j}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{1}{b_{lh}(n_{lh}+1)} \left(n_{lh}a_{lh} - n_{lh}p_{it} - n_{lh}v_{(l-1)j1} - \sum\limits_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr} \right) \\ \sum\limits_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{1}{b_{lh}(n_{lh}+1)} \left(n_{lh}a_{lh} - n_{lh}p_{it} - n_{lh}v_{(l-1)j2} - \sum\limits_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr} \right) \\ \vdots \\ \sum\limits_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{1}{b_{lh}(n_{lh}+1)} \left(n_{lh}a_{lh} - n_{lh}p_{it} - n_{lh}v_{(l-1)jn_{(l-1)j}} - \sum\limits_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr} \right) \end{pmatrix}. \qquad (1.2.12)$$

К матрице системы (1.2.12) существует обратная матрица, т.к. она является невырожденной. Таким образом, (1.2.12) однозначно разрешима относительно переменных $q_{(l-1)jk}$, $k = \overline{1, n_{(l-1)j}}$:

$$q_{(l-1)jk} = \frac{1}{n_{(l-1)j}+1} \left[\sum_{h:(l.h)\in S_j^{l-1}} \frac{1}{b_{lh}(n_{lh}+1)} \left(n_{lh}a_{lh} - n_{lh}p_{it} - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr} - \right.\right.$$

$$-n_{(l-1)j}n_{lh}v_{(l-1)jk}+n_{lh}\sum_{\substack{e=1\\e\neq k}}^{n_{(l-1)j}}v_{(l-1)je}\Bigg)\Bigg],k=\overline{1,n_{(l-1)j}}.$$

Далее посчитаем значение $Q_{(l-1)j}$:

$$Q_{(l-1)j}=\sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}}q_{(l-1)jk}=\frac{1}{n_{(l-1)j}+1}\left[\sum_{h:(l.h)\in S_j^{l-1}}\frac{1}{b_{lh}(n_{lh}+1)}*\right.$$
$$\left.*\left(n_{(l-1)j}\left(n_{lh}a_{lh}-n_{lh}p_{it}-\sum\nolimits_{r=1}^{n_{lh}}v_{lhr}\right)-n_{lh}\sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}}v_{(l-1)jk}\right)\right]. \quad (1.2.13)$$

Повторяем (1.2.9) – (1.2.13) для всех оставшихся вершин x_i^{l-1} этого уровня: $x_i^{l-1}\in X_{l-1},i\neq j$.

Далее мы аналогичным образом рассматриваем вершины x_t^i из множеств X_i вершин уровня i, $i=(l-2),(l-3),\dots,2$, решаем двухуровневую подыгру в каждом из секторов, образованных этими узлами, получая при этом решение, зависящее от цены поставщика узла x_t^i, и выражаем значение этой цены через переменные объема выпуска.

Переходим к рассмотрению множества вершин первого уровня. Функция прибыли для произвольной фирмы k из узла x_1^1 имеет вид (1.2.14):

$$\pi_{11k}=q_{11k}(p_{11}-v_{11k}). \quad (1.2.14)$$

Переменная p_{11} имеет выражение через переменные $q_{11k},k=\overline{1,n_{11}}$ и параметры производственных затрат, полученное после рассмотрения всех $X_i,i=\overline{2,l-1}$ из условия отсутствия дефицита и излишков:

$$p_{11}=f_{11}\left(q_{111},\dots,q_{11n_{11}},v_{it1},\dots,v_{itn_{it}},\dots,v_{111},\dots,v_{11n_{11}}\right),$$
$$i,t:(i,t)\in S_1^1, \quad (1.2.15)$$

где f_{11} линейная функция по аргументам $q_{111},\dots,q_{11n_{11}}$.

Подставим выражение (1.2.15) в (1.2.14)

$$\pi_{11j}=q_{11k}\left(f_{11}\left(q_{111},\dots,q_{11n_{11}},v_{it1},\dots,v_{itn_{it}},\dots,v_{11n_{11}}\right)-v_{11k}\right), \quad (1.2.16)$$

и применим к (1.2.16) необходимое условие максимума:

$$\frac{\partial \pi_{11k}}{\partial q_{11k}} = f_{11}\left(q_{111}, \dots, q_{11n_{11}}, v_{it1}, \dots, v_{itn_{it}}, \dots, v_{111}, \dots, v_{11n_{11}}\right) - \\ -v_{11k} + q_{11k}\frac{\partial f_{11}}{\partial q_{11k}} = 0, \qquad k = \overline{1, n_{11}}, \tag{1.2.17}$$

при этом значения всех производных $\frac{\partial f_{11}}{\partial q_{11k}}, k = \overline{1, n_{11}}$ являются константами в силу линейности функции f_{11}. Система (1.2.17) является системой линейных уравнений относительно $q_{111}, \dots, q_{11n_{11}}$ с невырожденной матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}_{[n_{11} \times n_{11}]}$. Вследствие этого она является однозначно разрешимой относительно всех $q_{11k}, k = \overline{1, n_{11}}$, и это решение зависит только от параметров цепи поставок. Далее последовательно подставляя полученные значения в выражения для неизвестных переменных, мы найдем их равновесные значения. Таким образом, абсолютное равновесие по Нэшу построено, а значит, оптимальный поток d^* найден.

1.3. Кооперативное решение в централизованной многоуровневой древовидной сети поставок

Пусть задана многоуровневая дистрибутивная сеть поставок $G = (X, F)$ с централизованной моделью поведения участников, т.е. все участники этой сети вступают в коалицию и действуют централизованно для достижения общей цели. Например, в качестве такой цели можно выбрать максимизацию суммы прибылей всех участников. Однако ранние исследования этой модели показали, что кооперативное решение, которое получается при выборе такой целевой функции, имеет существенный недостаток: прибыль некоторых участников может быть нулевой или даже отрицательной, а значит, требуется провести процедуру перераспределения прибыли, т.е. процедуру дележа. В условиях реального рынка это означает, что нужно в сеть поставок ввести систему контрактов, которые оговаривают прибыль, что сделать весьма затруднительно. В виду этого в качестве целевой функции мы будем рассматривать взвешенное произведение Нэша.

Пусть задана игра в нормальной форме $\Gamma = \langle N, \{U_l\}_{l\in N}, \{H_l\}_{l\in N}\rangle$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – непустое множество игроков, U_l – множество стратегий игрока l, а H_l – функция выигрыша игрока l, определенная на декартовом произведении множеств $\{U_l\}_{l\in N}$ стратегий игроков $Y = \prod_{l\in N} Y_l$, $H_l: Y \to R$ [15].

Определение 14. Взвешенным арбитражным решением Нэша для игры Γ с весовыми коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$: $\alpha_i > 0$ $i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, будем называть такой вектор $y' = (y'_1,\ y'_2,\ \dots, y'_n) \in Y$, что выполняется:

$$\underset{y_1, y_2, \dots, y_n}{\arg\max} \prod_{i=1}^{n} (H_i(y_1, y_2, \dots, y_n) - \theta_i)^{\alpha_i} = y'. \qquad (1.3.1)$$

где $\theta_i, i = \overline{1,n}$ – известные числа (обычно параметры θ_i представляют собой значения «гарантированного» выигрыша игрока i).

Набор параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ также часто называют точкой «статус-кво».

Аналогично параграфу 1.2. возьмем в качестве множества игроков упорядоченное множество вершин графа, в качестве множества стратегий – множества U_{ij}, а в качестве функций выигрыша – функции прибыли. Точкой статус-кво будем считать значение функций прибыли на децентрализованном решении этой же сети поставок (обозначим его через π^*). Тогда взвешенным арбитражным решением Нэша данной кооперативной игры будет являться решение следующей оптимизационной задачи:

$$\max_{q_{ijh}, p_{ij}} \prod_{i=1}^{l} \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{k=1}^{n_{ij}} \left(\pi_{ijk}\left(q_{ij1}, \dots, q_{ijn_{ij}}, v_{ij1}, \dots, v_{ijn_{ij}}, p_{ij}, p_{th}\right) - \pi_{ijk}^*\right)^{\alpha_{ijk}}$$

$$p_{th}: (i,j) \in S_h^t;$$

$$\pi_{ijk} \geq \pi_{ijk}^*, \qquad i = \overline{1,l}, \qquad j = \overline{1, m_\iota}, \qquad k = \overline{1, n_{\iota j}};$$

$$p_{lj} = a_{lj} - b_{lj} \sum_{k=1}^{n_{lj}} q_{ljk}\,, \qquad j = \overline{1, m_l};$$

$$\sum_{r=1}^{n_{th}} q_{thr} = \sum_{i,j:(i,j) \in S_h^t} \; \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk}\,, \quad t, h: x_h^t \notin X_l;$$

$$q_{ijk} \geq 0, p_{ij} \geq 0 \;\; i = \overline{1,l}, \qquad j = \overline{1, m_\iota}, \qquad k = \overline{1, n_{\iota j}};$$

где α_{ijk} – заданные числа, такие, что $\alpha_{ijk} > 0$, $i = \overline{1,l}$, $j = \overline{1, m_\iota}$, $k = \overline{1, n_{\iota j}}$,

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \alpha_{ijk} = 1;$$

В виду того, что произведение Нэша является непрерывной выпуклой функцией, а ограничения задают выпуклый компакт, то по теореме Нэша максимум функции существует и единственен.

Для автоматизации поиска как равновесного решения, так и кооперативного, была написана программа в прикладном пакете MATLAB, использующая, численный метод поиска экстремума функции при ограничениях (метод последовательного квадратичного программирования).

1.4. Численный пример и сравнение решений

Рассмотрим многоуровневую дистрибутивную сеть поставок, изображенную на Рис. 1.4.1, с параметрами, приведенными в Таблице 1.4.1.

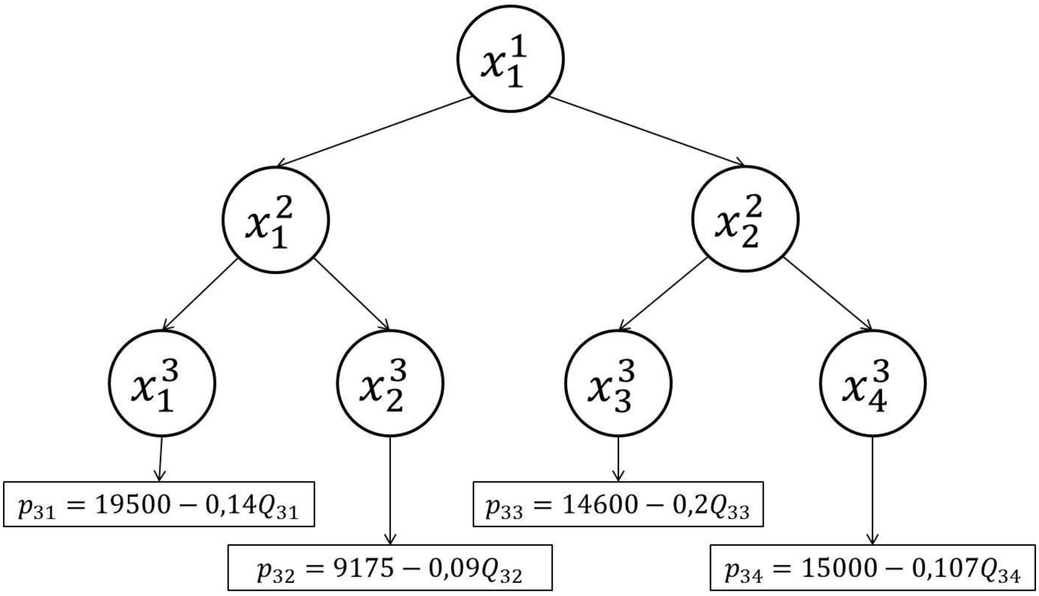

Рис. 1.4.1. Дистрибутивная цепь поставок

Таблица 1.4.1. Значение параметров дистрибутивной цепи поставок

Вершина	Количество фирм в вершине	Удельные издержки
x_1^1	3	$v_{111} = 1000$ $v_{112} = 950$ $v_{113} = 1037.5$
x_1^2	2	$v_{211} = 1800$ $v_{212} = 1985$
x_2^2	1	$v_{221} = 3967.5$
x_1^3	2	$v_{311} = 6835$ $v_{312} = 6907.5$
x_2^3	2	$v_{321} = 1744.5$ $v_{322} = 1813.5$
x_3^3	3	$v_{331} = 3117.5$ $v_{332} = 3047.5$ $v_{333} = 3051$
x_4^3	3	$v_{341} = 2637$ $v_{342} = 2761.5$ $v_{343} = 2712.75$

Данную модель сети поставок можно встретить, например, в секторе поливинилхлоридных изделий: фирмы в корневой вершине производят полинивинлхлоридный порошок и поставляют его фирмам в вершине x_1^2, которые производят жесткий винил, и фирмам в вершине x_2^2, производящим гибкий ПВХ. Фирмы из вершины x_1^2 в свою очередь поставляют винил фирмам в вершинах x_1^3 и x_2^3, производящим пластиковые окна и пластиковые карты (банковские, дисконтные и прочие) соответственно. Из гибкого ПВХ, произведенного в вершине x_2^2, фирмы из вершины x_3^3 производят водонепроницаемый текстиль и водоотталкивающие покрытия, а фирмы из вершины x_4^3 производят различные упаковочные материалы.

Построим децентрализованное решение для данной дистрибутивной сети поставок.

Функции прибыли фирм из концевых вершин имеют вид:

$$\pi_{311} = q_{311}(p_{31} - p_{21} - 6835),$$
$$\pi_{312} = q_{312}(p_{31} - p_{21} - 6907.5);$$

$$\pi_{321} = q_{321}(p_{32} - p_{21} - 1744.5),$$
$$\pi_{322} = q_{322}(p_{32} - p_{21} - 1813.5);$$

$$\pi_{331} = q_{331}(p_{33} - p_{22} - 3117.5),$$
$$\pi_{332} = q_{332}(p_{33} - p_{22} - 3047.5),$$
$$\pi_{333} = q_{333}(p_{33} - p_{22} - 3051);$$

$$\pi_{341} = q_{341}(p_{34} - p_{22} - 2637),$$
$$\pi_{342} = q_{342}(p_{34} - p_{22} - 2761.5),$$
$$\pi_{343} = q_{343}(p_{34} - p_{22} - 2712.75).$$

Подставим в каждую соответствующее значение цены, используя функцию спроса:

$$\pi_{311} = q_{311}\left(19500 - 0.14\sum_{i=1}^{2} q_{31i} - p_{21} - 6835\right),$$

$$\pi_{312} = q_{312}\left(19500 - 0.14\sum_{i=1}^{2} q_{31i} - p_{21} - 6907.5\right);$$

$$\pi_{321} = q_{321}\left(9175 - 0.09\sum_{i=1}^{2} q_{32i} - p_{21} - 1744.5\right),$$

$$\pi_{322} = q_{322}\left(9175 - 0.09\sum_{i=1}^{2} q_{32i} - p_{21} - 1813.5\right);$$

$$\pi_{331} = q_{331}\left(14600 - 0.2\sum_{i=1}^{3} q_{33i} - p_{22} - 3117.5\right),$$

$$\pi_{332} = q_{332}\left(14600 - 0.2\sum_{i=1}^{3} q_{33i} - p_{22} - 3047.5\right),$$

$$\pi_{333} = q_{333}\left(14600 - 0.2\sum_{i=1}^{3} q_{33i} - p_{22} - 3051\right);$$

$$\pi_{341} = q_{341}\left(15000 - 0.107\sum_{i=1}^{3} q_{34i} - p_{22} - 2637\right),$$

$$\pi_{342} = q_{342}\left(15000 - 0.107\sum_{i=1}^{3} q_{34i} - p_{22} - 2761.5\right),$$

$$\pi_{343} = q_{343}\left(15000 - 0.107\sum_{i=1}^{3} q_{34i} - p_{22} - 2712.75\right).$$

К полученным равенствам применим необходимое условие максимума. Таким образом, мы имеем 4 системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{311} \\ q_{312} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90464.29 - p_{21} \\ 89946.43 - p_{21} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{311} \\ q_{312} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82561.11 - p_{21} \\ 81794.44 - p_{21} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{331} \\ q_{332} \\ q_{333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57412.5 - p_{22} \\ 57761 - p_{22} \\ 57745 - p_{22} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{341} \\ q_{342} \\ q_{343} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115542.06 - p_{22} \\ 114378.5 - p_{22} \\ 114834.11 - p_{22} \end{pmatrix}.$$

Данные системы имеют следующие решения:

$$\begin{pmatrix} q_{311} \\ q_{312} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30327.38 - 2.38\, p_{21} \\ 29809.52 - 2.38\, p_{21} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} q_{321} \\ q_{322} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27775.93 - 3.7\, p_{21} \\ 27009.26 - 3.7\, p_{21} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} q_{331} \\ q_{332} \\ q_{333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14182.5 - 1.25\, p_{22} \\ 14532.5 - 1.25\, p_{22} \\ 14515 - 1.25\, p_{22} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} q_{341} \\ q_{342} \\ q_{343} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29353.39 - 2.34\, p_{22} \\ 28189.84 - 2.34\, p_{22} \\ 28645.44 - 2.34\, p_{22} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем значения $Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, Q_{34}$:

$$Q_{31} = 60136.9 - 4.76\, p_{21};$$

$$Q_{32} = 54785.19 - 4.76\, p_{21};$$

$$Q_{33} = 43185 - 3.75\, p_{22};$$

$$Q_{34} = 86188.67 - 7.02\, p_{22};$$

Из условия отсутствия дефицита и излишков (1.1.2) имеем следующее:

$$\sum_{i=1}^{2} q_{21i} = Q_{21} = Q_{31} + Q_{32} = 114922.09 - 12.17\, p_{21};$$

$$q_{221} = Q_{22} = Q_{33} + Q_{34} = 129373.67 - 10.76\, p_{22}.$$

Откуда мы получаем, что:

$$p_{21} = 9443.6 - 0.08 \sum_{i=1}^{2} q_{21i};$$

$$p_{22} = 12024.31 - 0.09\, q_{221}.$$

Переходим к рассмотрению вершин x_1^2 и x_2^2 и построению функций прибыли фирм из этих вершин:

$$\pi_{211} = q_{211}\left(9443.6 - 0.0016 \sum_{i=1}^{2} q_{21i} - p_{11} - 1800\right);$$

$$\pi_{212} = q_{212}\left(17984.39 - 0.0016\sum_{i=1}^{2} q_{21i} - p_{11} - 1985\right);$$

$$\pi_{221} = q_{221}(12024.31 - 0.09\, q_{221} - p_{11} - 3967.5).$$

Применив необходимое условие максимума, получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{211} \\ q_{212} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114922.09 - 12.17\, p_{11} - 21904.77 \\ 114922.09 - 12.17\, p_{11} - 24156.08 \end{pmatrix};$$

$$(12024.31 - 0.09\, q_{221} - p_{11} - 3967.5) - 0.09\, q_{221} = 0.$$

Единственное решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} q_{211} \\ q_{212} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31756.22 - 4.06\, p_{11} \\ 29504.89 - 4.06\, p_{11} \end{pmatrix};$$

$$q_{221} = 43365.48 - 5.38\, p_{11}.$$

Тогда

$$Q_{11} = Q_{21} + Q_{22} = 104626.59 - 13.49\, p_{11}.$$

Следовательно,

$$p_{11} = 7754.4 - 0.07\sum_{i=1}^{3} q_{11i}.$$

Тогда функции прибыли фирм из корневой вершины имеют вид:

$$\pi_{111} = q_{111}\left(7754.4 - 0.07\sum_{i=1}^{3} q_{11i} - 1000\right);$$

$$\pi_{112} = q_{112}\left(7754.4 - 0.07\sum_{i=1}^{3} q_{11i} - 950\right);$$

$$\pi_{113} = q_{113}\left(7754.4 - 0.07\sum_{i=1}^{3} q_{11i} - 1037.5\right).$$

Применив к ним необходимое условие максимума и решив систему уравнений, мы получим решение:

$$q_{111} \approx 22741;\ \ q_{112} \approx 23416;$$

$$q_{113} \approx 22235;\ \ p_{11} \approx 2685{,}5.$$

Подставляем эти значения во все ранее полученные выражения, и таким образом, равновесное решение имеет вид:

x_1^1: $$q_{111} \approx 22741; q_{112} \approx 23416; q_{113} \approx 22235;$$
$$p_{11} \approx 2685.5;$$

x_1^2: $$q_{211} \approx 20863;\ \ q_{212} \approx 18611;$$
$$p_{21} \approx 6199.9;$$

x_2^2: $$q_{221} \approx 28919; \quad p_{22} \approx 9340.73;$$

x_1^3: $$q_{311} \approx 15566;\ \ q_{312} \approx 15048;$$
$$p_{31} \approx 15214;$$

x_2^3: $$q_{321} \approx 4814;\ \ q_{322} \approx 4047;$$
$$p_{32} \approx 8377.6;$$

x_3^3: $$q_{331} \approx 2507;\ \ q_{332} \approx 2857;\ \ q_{333} \approx 2839;$$
$$p_{33} \approx 12959.6;$$

x_4^3: $$q_{341} \approx 7529;\ \ q_{342} \approx 6366;\ \ q_{343} \approx 6821;$$
$$p_{34} \approx 12783.4.$$

Для нахождения кооперативного решения воспользуемся прикладным пакетом MATLAB. Для автоматизированного поиска арбитражного решения Нэша была написана программа на языке MATLAB, использующая метод последовательного квадратичного программирования – итеративный численный метод для поиска экстремума нелинейной функции с ограничениями.

Кооперативное решение, представляющее собой решение следующей оптимизационной задачи

$$\max_{q_{ijk},\ p_{ij}} [(q_{311}(p_{31} - p_{21} - 6835) - 33\,921\,333) *$$
$$* (q_{312}(p_{31} - p_{21} - 6907.5) - 31\,701\,832) *$$
$$* (q_{321}(p_{32} - p_{21} - 1744.5) - 2\,085\,300) *$$
$$* (q_{322}(p_{32} - p_{21} - 1813.5) - 1\,473\,933) *$$
$$* (q_{331}(p_{33} - p_{22} - 3117.5) - 1\,256\,594) *$$
$$* (q_{332}(p_{33} - p_{22} - 3047.5) - 1\,632\,016) *$$
$$* (q_{333}(p_{33} - p_{22} - 3051) - 1\,612\,081) *$$
$$* (q_{341}(p_{34} - p_{22} - 2637) - 6\,065\,785) *$$

$$* (q_{342}(p_{34} - p_{22} - 2761.5) - 4\,335\,865) *$$
$$* (q_{343}(p_{34} - p_{22} - 2712.75) - 4\,978\,731) *$$
$$* (q_{211}(p_{21} - p_{11} - 1800) - 35\,766\,577) *$$
$$* (q_{212}(p_{21} - p_{11} - 1985) - 28\,463\,851) *$$
$$* (q_{221}(p_{22} - p_{11} - 3967.5) - 77\,725\,918) *$$
$$* (q_{111}(p_{11} - 1000) - 38\,329\,964) * (q_{112}(p_{11} - 950) - 40\,637\,830) *$$
$$* (q_{113}(p_{11} - 1037.5) - 36\,643\,337)];$$

$$p_{31} = 19500 - 0.14Q_{31};$$
$$p_{32} = 9175 - 0.09Q_{32};$$
$$p_{33} = 14000 - 0.2Q_{33};$$
$$p_{34} = 15000 - 0.107Q_{34};$$
$$Q_{21} = Q_{31} + Q_{32};$$
$$Q_{22} = Q_{33} + Q_{34};$$
$$Q_{11} = Q_{21} + Q_{22};$$
$$q_{ijk} \geq 0, p_{ij} \geq 0;$$

имеет вид:

x_1^1: $q_{111} \approx 36269; q_{112} \approx 36901; q_{113} \approx 35978;$ $p_{11} \approx 2147;$

x_1^2: $q_{211} \approx 30255;\ q_{212} \approx 28240;$ $p_{21} \approx 5247;$

x_2^2: $q_{221} \approx 50652;\ p_{22} \approx 7716;$

x_1^3: $q_{311} \approx 19717;\ q_{312} \approx 19213;$ $p_{31} \approx 14050;$

x_2^3: $q_{321} \approx 10202;\ q_{322} \approx 9363;$ $p_{32} \approx 7414;$

x_3^3: $q_{331} \approx 4742;\ q_{332} \approx 5051;\ q_{333} \approx 5035;$ $p_{33} \approx 11634;$

x_4^3: $q_{341} \approx 12618;\ q_{342} \approx 11361;\ q_{343} \approx 11846;$

$$p_{34} \approx 11167.$$

Для большей наглядности приведем значения прибылей участников на обоих решениях в одной таблице (Таблица 1.4.2):

Таблица 1.4.2. Значения прибылей участников сети поставок на равновесном и кооперативном решениях

Вершина	**Равновесное решение**	**Кооперативное решение**
x_1^1:	$\pi_{111} \approx 38\,329\,964$; $\pi_{112} \approx 40\,637\,830$; $\pi_{113} \approx 36\,643\,337$;	$\pi_{111} \approx 41\,583\,866$; $\pi_{112} \approx 44\,153\,238$; $\pi_{113} \approx 39\,901\,222$;
x_1^2:	$\pi_{211} \approx 35\,766\,577$; $\pi_{212} \approx 28\,463\,851$;	$\pi_{211} \approx 39\,338\,133$; $\pi_{212} \approx 31\,494\,989$;
x_2^2:	$\pi_{221} \approx 77\,725\,918$;	$\pi_{221} \approx 81\,124\,405$;
x_1^3:	$\pi_{311} \approx 33\,921\,333$; $\pi_{312} \approx 31\,701\,832$;	$\pi_{311} \approx 38\,802\,859$; $\pi_{312} \approx 36\,418\,337$;
x_2^3:	$\pi_{321} \approx 2\,085\,300$; $\pi_{322} \approx 1\,473\,933$;	$\pi_{321} \approx 4\,314\,156$; $\pi_{322} \approx 3\,313\,295$;
x_3^3:	$\pi_{331} \approx 1\,256\,594$; $\pi_{332} \approx 1\,632\,016$; $\pi_{333} \approx 1\,612\,081$;	$\pi_{331} \approx 3\,799\,887$; $\pi_{332} \approx 4\,400\,600$; $\pi_{333} \approx 4\,369\,455$;
x_4^3:	$\pi_{341} \approx 6\,065\,785$; $\pi_{342} \approx 4\,335\,865$; $\pi_{343} \approx 4\,978\,731$.	$\pi_{341} \approx 10\,272\,866$; $\pi_{342} \approx 7\,834\,661$; $\pi_{343} \approx 8\,746\,819$.

Нетрудно видеть, что на кооперативном решении прибыль всех участников сети значительно увеличилась. Средний прирост прибыли участников составил 67.5%. Общая прибыль сети, которая на равновесном решении составляла 346 630 948, при переходе к кооперативному решению возросла до 399 868 790, т.е. прирост составил 15%. Мощность товарного потока увеличилась больше, чем в 1.5 раза – на 60%: с 68 393 единиц до

109 148 единиц. Кроме того, цены, по которым финальный продукт продается на конечных рынках, на кооперативном решении ниже, чем на равновесном. Таким образом, кооперативное решение является предпочтительнее равновесного не только для участников сети, но и для конечных потребителей.

Глава 2. Конкуренция и кооперация в дистрибутивных сетях поставок

2.1. Децентрализованное решение в сетях поставок со сборочной структурой

Большинство производимых товаров, начиная от сложных технологических аппаратов заканчивая одеждой, состоят из отдельных компонент, которые соединяются на разных этапах производства конечного продукта. Например, при производстве персональных компьютеров необходимы материнская плата, процессор, видеокарта, которые закупаются у разных поставщиков и собираются производителем в один компьютер. Таким образом, формируется сеть поставок, товарные потоки в каждом узле которой проходят процесс «сборки», и в результате образуется один конечный продукт, который реализуется на потребительском рынке. Пример сети поставок со сборочной структурой приведен на Рис. 2.1.1.

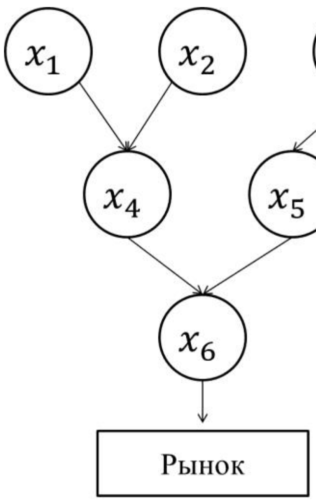

Рис. 2.1.1. Пример сети поставок со сборочной структурой

Формализуем теперь сети поставок со сборочной структурой с помощью графа. Рассмотрим связный граф $G = (X, F)$, где X – это множество вершин, а функция альтернатив F такова, что:

1) $\exists$ единственная вершина $x^* \in X$ такая, что $F(x) = \emptyset$;

2) Для любой вершины $x \in (X \backslash x^*)$: $|F(x)| = 1$.

Далее на множестве вершин X зададим разбиение по следующему правилу:

$$X_1 = \{x^*\};$$
$$X_{k+1} = F^{-1}(X_k), \qquad \text{если } F^{-1}(X_k) \neq \emptyset, k = \overline{1, l-2}. \tag{2.1.1}$$

Теперь перенумеруем множества $X_1, \dots, X_l$ в обратном порядке, т.е. X_1 обозначим за X_l; X_l, наоборот, за X_1; X_2 – за X_{l-1}, а X_{l-1} – за X_2, и т.д.

Вершины из множества X переобозначим следующим образом: x_j^i, где верхний индекс соответствует уровню множества X_i, которому принадлежит вершина, а нижний – порядковому номеру в этом множестве.

Как и ранее, будем считать, что каждая вершина x_j^i, $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, m_i}$ сети поставок состоит из конечной совокупности элементов $\{x_{jk}^i\}_{k=1}^{n_{ij}}$, где n_{ij} – количество элементов совокупности, содержательно являющейся группой конкурирующих фирм. Для каждого элемента этой совокупности определено число $v_{ijk} \geq 0$.

Также для каждой фирмы x_{jk}^i введем переменную $q_{ijk} \geq 0$ – переменный объем выпуска этой фирмы. Общий объем продукта, произведенный фирмами $\{x_{jk}^i\}_{k=1}^{n_{ij}}$ в вершине x_j^i, обозначим через $Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk}$. Будем считать, что в цепи выполняется условие отсутствия дефицита и излишков – условие (1.1.2).

Для каждой вершины $x_j^i \in X$ введем переменную p_{ij}, которая характеризует цену, по которой фирмы из этой вершины продают единицу производимой продукции при объеме выпуска Q_{ij}. Также будем предполагать, что конечной вершины задана функция спроса вида (1.1.3).

Построим децентрализованное решение в сети поставок. Рассмотрим концевую вершину x_1^l. Функция прибыли фирмы k из этой вершины имеет вид:

$$\pi_{l1k} = q_{l1k}\left(p_{l1} - \sum_{t=1}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - v_{l1k}\right), \qquad k = \overline{1, n_{l1}}.$$

Подставим вместо p_{l1} выражение, используя формулу (1.1.3):

$$\pi_{l1k} = q_{l1k}\left(a_{l1} - b_{l1}\sum_{h=1}^{n_{l1}} q_{l1h} - \sum_{(i,t)\in E_1^l} p_{it} - v_{l1k}\right), \qquad k = \overline{1, n_{l1}},$$

применив необходимое условие максимума, мы придем к системе:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} q_{l11} \\ q_{l12} \\ \vdots \\ q_{l1n_{l1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b_{l1}}\left(a_{l1} - \sum_{t=1}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - v_{l11}\right) \\ \dfrac{1}{b_{l1}}\left(a_{l1} - \sum_{t=1}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - v_{l12}\right) \\ \vdots \\ \dfrac{1}{b_{l1}}\left(a_{l1} - \sum_{t=1}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - v_{l1n_{l1}}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Единственное решение системы (2.1.2) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} q_{l11} \\ q_{l12} \\ \vdots \\ q_{l1n_{l1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{l1}(n_{l1}+1)}\left(a_{l1} - \left(\sum_{t=1}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} + n_{l1}v_{l11} - \sum_{h=2}^{n_{l1}} v_{l1h}\right)\right) \\ \frac{1}{b_{l1}(n_{l1}+1)}\left(a_{l1} - \left(\sum_{t=1}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} + n_{l1}v_{l12} - \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq 2}}^{n_{l1}} v_{l1h}\right)\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{l1}(n_{l1}+1)}\left(a_{l1} - \left(\sum_{t=1}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} + n_{l1}v_{l1n_{l1}} - \sum_{h=1}^{n_{l1}-1} v_{l1h}\right)\right) \end{pmatrix}. \quad (2.1.3)$$

Тогда

$$Q_{l1} = \sum_{k=1}^{n_{l1}} q_{l1k} = \frac{n_{l1}\left(a_{l1} - \sum_{t=1}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t}\right) - \sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k}}{b_{l1}(n_{l1}+1)}. \quad (2.1.4)$$

Из формулы (1.1.2) имеем:

$$Q_{l1} = Q_{(l-1)1} = Q_{(l-1)2} = \cdots = Q_{(l-1)m_{l-1}}$$

и тогда из соотношения (2.1.4) мы получаем:

$$Q_{l1} = Q_{(l-1)j} = \sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} = \frac{n_{l1}\left(a_{l1} - \sum_{t=1}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t}\right) - \sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k}}{b_{l1}(n_{l1}+1)}.$$

Тогда:

$$p_{(l-1)j} = -\frac{b_{l1}(n_{l1}+1)}{n_{l1}} \sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} + a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}} \sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k} - \sum_{\substack{t=1 \\ t\neq j}}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t}, \quad (2.1.5)$$

$$j = 1, m_{l-1}.$$

Рассмотрим вершины из множества X_{l-1}. Для каждой вершины x_j^{l-1} функция прибыли фирмы k имеет вид:

$$\pi_{(l-1)jk} = q_{(l-1)jk}\left(p_{(l-1)j} - \sum_{F_{x_t^{l-2}} = x_j^{l-1}} p_{(l-2)t} - v_{(l-1)jk}\right),$$

$$k = \overline{1, n_{(l-1)j}}, j = \overline{1, m_{l-1}}.$$

Подставим в неё формулу (2.1.5):

$$\pi_{(l-1)jk} = q_{(l-1)jk}\left(-\frac{b_{l1}(n_{l1}+1)}{n_{l1}}\sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} + a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}}\sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k} -\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{t=1\\ t\neq j}}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - \sum_{F_{x_t^{l-2}=x_j^{l-1}}} p_{(l-2)t} - v_{(l-1)jk}\right), k=\overline{1,n_{(l-1)j}}, j=\overline{1,m_{l-1}};$$

и применим необходимое условие максимума:

$$\left(-\frac{b_{l1}(n_{l1}+1)}{n_{l1}}\sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} + a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}}\sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k} -\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{t=1\\ t\neq j}}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - \sum_{F_{x_t^{l-2}=x_j^{l-1}}} p_{(l-2)t} - v_{(l-1)jk}\right) - q_{(l-1)jk}\frac{b_{l1}(n_{l1}+1)}{n_{l1}} = 0,$$

$$k=\overline{1,n_{(l-1)j}}, \qquad j=\overline{1,m_{l-1}}.$$

Таким образом, мы получаем следующую совокупность систем:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 1 & & 1\\ & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{(l-1)j1}\\ q_{(l-1)j2}\\ \vdots\\ q_{(l-1)jn_{(l-1)j}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{n_{l1}}{b_{l1}(n_{l1}+1)}\begin{pmatrix} a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}}\sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k} - \sum_{\substack{t=1\\ t\neq j}}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - \sum_{F_{x_t^{l-2}=x_j^{l-1}}} p_{(l-2)t} - v_{(l-1)j1}\\ a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}}\sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k} - \sum_{\substack{t=1\\ t\neq j}}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - \sum_{F_{x_t^{l-2}=x_j^{l-1}}} p_{(l-2)t} - v_{(l-1)j2}\\ \vdots\\ a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}}\sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k} - \sum_{\substack{t=1\\ t\neq j}}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - \sum_{F_{x_t^{l-2}=x_j^{l-1}}} p_{(l-2)t} - v_{(l-1)jn_{(l-1)j}} \end{pmatrix},$$

$$j=\overline{1,m_{l-1}}.$$

Единственное решение имеет вид (2.1.6):

$$\begin{pmatrix} q_{(l-1)j1} \\ q_{(l-1)j2} \\ \vdots \\ q_{(l-1)jn_{(l-1)j}} \end{pmatrix} = \frac{n_{l1}}{b_{l1}(n_{l1}+1)\left(n_{(l-1)j}+1\right)} * \tag{2.1.6}$$

$$* \begin{pmatrix} a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}}\sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k} - \sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - \sum_{F_{x_t^{l-2}}=x_j^{l-1}} p_{(l-2)t} - \left(n_{(l-1)j}+1\right)v_{(l-1)j1} + \sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} v_{(l-1)jk} \\ a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}}\sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k} - \sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - \sum_{F_{x_t^{l-2}}=x_j^{l-1}} p_{(l-2)t} - \left(n_{(l-1)j}+1\right)v_{(l-1)j2} + \sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} v_{(l-1)jk} \\ \vdots \\ a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}}\sum_{k=1}^{n_{l1}} v_{l1k} - \sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - \sum_{F_{x_t^{l-2}}=x_j^{l-1}} p_{(l-2)t} - \left(n_{(l-1)j}+1\right)v_{(l-1)jn_{(l-1)j}} + \sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} v_{(l-1)jk} \end{pmatrix},$$

$$j = \overline{1, m_{l-1}}.$$

Далее для краткости через V_{ij} будем обозначать сумму $\sum_{k=1}^{n_{ij}} v_{ijk}$. Из равенства:

$$Q_{(l-1)j} = \sum_{s=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} = \frac{n_{l1}n_{(l-1)j}}{b_{l1}(n_{l1}+1)\left(n_{(l-1)j}+1\right)} *$$

$$* \left(a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}} V_{l1} - \sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{m_{l-1}} p_{(l-1)t} - \sum_{F\left(x_t^{l-2}\right)=x_j^{l-1}} p_{(l-2)t} - \frac{1}{n_{(l-1)j}} V_{(l-1)j} \right), j = \overline{1, m_{l-1}};$$

мы получаем следующую систему:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{(l-1)1} \\ p_{(l-1)2} \\ \vdots \\ p_{(l-1)m_{l-1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}} V_{l1} - \sum_{F_{x_t^{l-2}}=x_j^{l-1}} p_{(l-2)t} - \frac{1}{n_{(l-1)j}} V_{(l-1)j} - \frac{b_{l1}(n_{l1}+1)\left(n_{(l-1)j}+1\right)}{n_{l1}n_{(l-1)j}} Q_{(l-1)j} \\ a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}} V_{l1} - \sum_{F_{x_t^{l-2}}=x_j^{l-1}} p_{(l-2)t} - \frac{1}{n_{(l-1)j}} V_{(l-1)j} - \frac{b_{l1}(n_{l1}+1)\left(n_{(l-1)j}+1\right)}{n_{l1}n_{(l-1)j}} Q_{(l-1)j} \\ \vdots \\ a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}} V_{l1} - \sum_{F_{x_t^{l-2}}=x_j^{l-1}} p_{(l-2)t} - \frac{1}{n_{(l-1)j}} V_{(l-1)j} - \frac{b_{l1}(n_{l1}+1)\left(n_{(l-1)j}+1\right)}{n_{l1}n_{(l-1)j}} Q_{(l-1)j} \end{pmatrix}.$$

Матрица данной системы является невырожденной, следовательно, система однозначно разрешима:

$$\begin{pmatrix} p_{(l-1)1} \\ p_{(l-1)2} \\ \vdots \\ p_{(l-1)m_{l-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(m_{l-1}-2)}{(m_{l-1}-1)} & \frac{1}{(m_{l-1}-1)} & \frac{1}{(m_{l-1}-1)} & \cdots & \frac{1}{(m_{l-1}-1)} \\ \frac{1}{(m_{l-1}-1)} & \frac{-(m_{l-1}-2)}{(m_{l-1}-1)} & \frac{1}{(m_{l-1}-1)} & & \frac{1}{(m_{l-1}-1)} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(m_{l-1}-1)} & \frac{1}{(m_{l-1}-1)} & \frac{1}{(m_{l-1}-1)} & \cdots & \frac{-(m_{l-1}-2)}{(m_{l-1}-1)} \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}} V_{l1} - \sum\limits_{F_{x_t^{l-2}=x_j^{l-1}}} p_{(l-2)t} - \frac{1}{n_{(l-1)j}} V_{(l-1)j} - \frac{b_{l1}(n_{l1}+1)\big(n_{(l-1)j}+1\big)}{n_{l1}n_{(l-1)j}} Q_{(l-1)j} \\ a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}} V_{l1} - \sum\limits_{F_{x_t^{l-2}=x_j^{l-1}}} p_{(l-2)t} - \frac{1}{n_{(l-1)j}} V_{(l-1)j} - \frac{b_{l1}(n_{l1}+1)\big(n_{(l-1)j}+1\big)}{n_{l1}n_{(l-1)j}} Q_{(l-1)j} \\ \vdots \\ a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}} V_{l1} - \sum\limits_{F_{x_t^{l-2}=x_j^{l-1}}} p_{(l-2)t} - \frac{1}{n_{(l-1)j}} V_{(l-1)j} - \frac{b_{l1}(n_{l1}+1)\big(n_{(l-1)j}+1\big)}{n_{l1}n_{(l-1)j}} Q_{(l-1)j} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$p_{(l-1)j} = \frac{1}{(m_{l-1}-1)} \Bigg[a_{l1} - \frac{1}{n_{l1}} V_{l1} - \sum_{F_{x_t^{l-2}=x_j^{l-1}}} p_{(l-2)t} + \frac{(m_{l-1}-2)}{n_{(l-1)j}} *$$

$$* \left(V_{(l-1)j} + \frac{b_{l1}(n_{l1}+1)\big(n_{(l-1)j}+1\big)}{n_{l1}} Q_{(l-1)j} \right) - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m_{l-1}} \frac{V_{(l-1)k}}{n_{(l-1)k}} - \tag{2.1.7}$$

$$- \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m_{l-1}} \frac{b_{l1}(n_{l1}+1)\big(n_{(l-1)k}+1\big)}{n_{l1}n_{(l-1)k}} Q_{(l-1)k} \Bigg], \qquad j = \overline{1, m_{l-1}}.$$

Полученные выражения (2.1.7) подставим в формулу (2.1.6) и, воспользовавшись условием отсутствия дефицита и излишков, выразим переменные $p_{(l-2)j}, j = \overline{1, m_{l-2}}$. Далее действуем аналогично для всех оставшихся множеств $X_i, i = l - 2, l - 3, \dots, 1$. После рассмотрения вершин первого уровня и применения к ним данного алгоритма, равновесное решение будет построено.

2.2. Математическая формализация многоуровневых сетей поставок с дистрибутивной структурой

Рассмотрим связный древовидный граф $G_1 = (X^1, F_1)$ с корневой вершиной x^*, определенный в параграфе 1.1. Также рассмотрим связный граф $G_2 = (X^2, F_2)$ со сборочной структурой и концевой вершиной x^*, определенный в параграфе 2.1.

Рассмотрим теперь связный граф $G = (X, F)$, где

$$X = X^1 \cup X^2;$$

$$F = \begin{cases} F_1(x), & x \in X^1 \backslash x^*; \\ F_2, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Определение 15. Будем говорить, что граф, определенный по правилу (2.2.1) имеет дистрибутивную структуру.

Пример графа с дистрибутивной структурой приведен на Рис. 2.2.1.

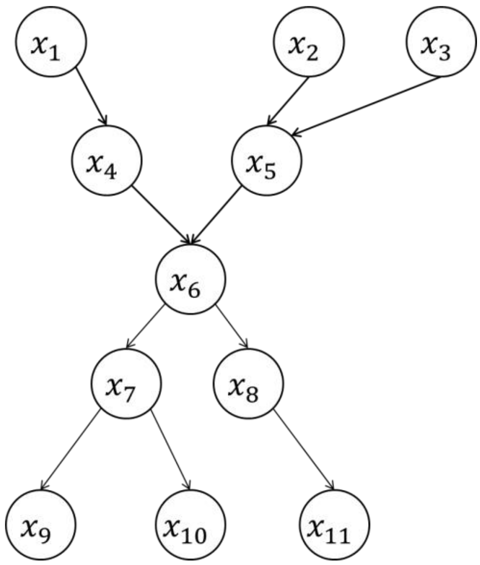

Рис. 2.2.1. Пример графа с дистрибутивной структурой

Множество концевых вершин, т.е. $x \in X^2 : F(x) = \emptyset$, обозначим через $\bar{X}$. Зададим на множестве $X = X^1 \cup X^2$ разбиение по следующему правилу:

$$X_1 \ = \ \{x \mid \nexists y \in X^1 : F(y) = x\};$$

$$X_{k+1} = \bigcup_{x \in X_k} (F(x) \backslash x^*) \text{, если} \bigcup_{x \in X_k} (F(x) \backslash x^*) \neq \emptyset, k = 1,2, \dots s-2; \tag{2.2.2}$$

$$X_s = x^*;$$

$$X_{k+1} = \bigcup_{x \in X_k} \left(F(x) \backslash \overline{X}\right), \text{если} \bigcup_{x \in X_k} \left(F(x) \backslash \overline{X}\right) \neq \emptyset, k = s, s+1, \dots l-2;$$

$$X_l = \overline{X}.$$

Как и ранее множества $X_i, i = \overline{1, l}$ будем называть множествами вершин уровня i.

Аналогично модели главы 1 будем использовать обозначение m_i для количества вершин во множестве вершин X_i, а также понятия сектора и множества S_j^i вершины x_j^i. Кроме того, мы также будем считать, что каждая вершина x_j^i состоит из конечной совокупности элементов $\left\{x_{jk}^i\right\}_{k=1}^{n_{ij}}$ – конкурирующих фирм, и для каждой фирмы x_{jk}^i задано число $v_{ijk} \geq 0$ – переменные издержки.

Для каждой фирмы x_{jk}^i введем переменную $q_{ijk} \geq 0$, которая характеризует переменный объем выпуска этой фирмы. Общий объем продукта, произведенный фирмами $\left\{x_{jk}^i\right\}_{k=1}^{n_{ij}}$ в вершине x_j^i, обозначим через $Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk}$. В рамках данной работы мы будем предполагать, что для сектора каждой вершины $x_j^i \in X \backslash X_l$ цепи поставок выполнено условие:

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk} = \sum_{r,h:(r,h) \in S_j^i} Q_{rh} = \sum_{r,h:(r,h) \in S_j^i} \sum_{t=1}^{n_{rh}} q_{rht}. \qquad (2.2.3)$$

Для каждой вершины $x_j^i \in X$ введем переменную p_{ij}, характеризующую цену, по которой фирмы из этой вершины продают единицу производимой продукции при объеме выпуска Q_{ij}. Также предполагается, что каждая концевая вершина $x_j^l \in X_l$ характеризуется линейной функцией спроса вида

$$p_{lj} = a_{lj} - b_{lj} Q_{lj}, \qquad (2.2.4)$$

где $a_{lj} > 0, b_{lj} > 0$ – заданные параметры.

Определение 16. Набор значений $\left(\{q_{ijk}\}_{i,j,k}, \{p_{ij}\}_{i,j}\right)$ будем называть *потоком d в сети поставок*.

Определение 17. Поток d будем называть *допустимым*, если выполнены условия (2.2.3) и (2.2.4) и

$$p_{ij} \geq 0, \qquad Q_{ij} \geq 0, \qquad i = \overline{1,l} \;\; j = \overline{1,m_l}.$$

Для каждой фирмы $x_{jk}^i \in x_j^i$, $i = \overline{1,l}, j = \overline{1,m_\iota}$ определим её функцию прибыли π_{ijk} на множестве D следующим образом:

$$\pi_{ijk}(d) = \begin{cases} q_{ijk}(p_{i1} - v_{ijk}), & \text{если } i = j = 1; \\ q_{ijk}(a_{ij} - b_{ij}Q_{ij} - p_{rh} - v_{ijk}), & \text{если } i = l; \\ q_{ijk}(p_{ij} - p_{rh} - v_{ijk}), & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

где p_{rh}: $(i,j) \in S_h^r$.

Следующие параграфы данной главы будут посвящены рассмотрению моделей конкуренции и кооперации в цепи поставок с дистрибутивной структурой. В параграфе 2.3 мы исследуем децентрализованную модель поведения участников, т.е. рассмотрим модель в условиях конкуренции в сети поставок, а в параграфе 2.4 – централизованную модель, т.е. модель кооперации.

2.3. Децентрализованное решение в многоуровневой дистрибутивной сети поставок

Пусть задана многоуровневая дистрибутивная сеть поставок $G = (X, F)$ с децентрализованной моделью поведения участников. В этой сети найдем равновесие по Нэшу, удовлетворяющее определению 17.

Рассмотрим вершину x_j^l уровня X_l. Функция прибыли фирмы k из этой вершины имеет вид:

$$\pi_{ljk} = q_{ljk}(p_{lj} - p_{it} - v_{ljk}), \qquad p_{it}: (l, j) \in S_t^i.$$

Используя функцию спроса (2.2.4), подставим в эту формулу выражение для переменной p_{lj}:

$$\pi_{ljk} = q_{ljk}(a_{lj} - b_{lj}Q_{lj} - p_{it} - v_{ljk}), \tag{2.3.1}$$

затем применим необходимое условие максимума (2.3.2):

$$\frac{\partial \pi_{ljk}}{\partial q_{ljk}} = 0, \qquad k = \overline{1, n_{lj}}. \tag{2.3.2}$$

Действуя аналогичным образом в отношении оставшихся фирм из этой вершины, мы придем к системе (2.3.3):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} q_{lj1} \\ q_{lj2} \\ \vdots \\ q_{ljn_{lj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{lj}}(a_{lj} - p_{it} - v_{lj1}) \\ \frac{1}{b_{lj}}(a_{lj} - p_{it} - v_{lj2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{lj}}(a_{lj} - p_{it} - v_{ljn_{lj}}) \end{pmatrix}. \tag{2.3.3}$$

Решение системы (2.3.3) имеет вид (2.3.4):

$$\begin{pmatrix} q_{lj1} \\ q_{lj2} \\ \vdots \\ q_{ljn_{lj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{lj}(n_{lj}+1)}\left(a_{lj} - \left(p_{it} + n_{lj}v_{lj1} - \sum_{h=2}^{n_{lj}} v_{ljh}\right)\right) \\ \frac{1}{b_{lj}(n_{lj}+1)}\left(a_{lj} - \left(p_{it} + n_{lj}v_{lj2} - \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq 2}}^{n_{lj}} v_{ljh}\right)\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{b_{lj}(n_{lj}+1)}\left(a_{lj} - \left(p_{it} + n_{lj}v_{ljn_{lj}} - \sum_{h=1}^{n_{lj}-1} v_{ljh}\right)\right) \end{pmatrix}. \qquad (2.3.4)$$

Тогда

$$Q_{lj} = \sum_{k=1}^{n_{lj}} q_{ljk} = \frac{n_{lj}(a_{lj} - p_{it}) - \sum_{k=1}^{n_{lj}} v_{ljk}}{b_{lj}\left(n_{lj}+1\right)}. \qquad (2.3.5)$$

Повторим (2.3.1) – (2.3.5) для всех вершин уровня l.

Далее рассмотрим фирму k из x_j^{l-1}. Её функция прибыли:

$$\pi_{(l-1)jk} = q_{(l-1)jk}\left(p_{(l-1)j} - p_{it} - v_{(l-1)jk}\right), \qquad k = \overline{1, n_{(l-1)j}},$$
$$\text{где } p_{it}\colon (l-1, j) \in S_t^i. \qquad (2.3.6)$$

Из условия отсутствия излишков и дефицита (2.2.3) имеем соотношение

$$\sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} = Q_{(l-1)j} = \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} Q_{lh} =$$
$$= \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}\left(a_{lh} - p_{(l-1)j}\right) - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr}}{b_{lh}(n_{lh}+1)},$$

используя которое можно однозначно выразить переменную $p_{(l-1)j}$:

$$p_{(l-1)j} = f_{(l-1)j}\left(q_{(l-1)j1}, \dots, q_{(l-1)jn_{(l-1)j}}\right) =$$

$$= \frac{-\sum_{k=1}^{n_{(l-1)j}} q_{(l-1)jk} + \sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}a_{lh} - \sum_{r=1}^{n_{lh}} v_{lhr}}{b_{lh}(n_{lh}+1)}}{\sum_{h:(l,h)\in S_j^{l-1}} \frac{n_{lh}}{b_{lh}(n_{lh}+1)}}. \qquad (2.3.7)$$

Подставим (2.3.7) в формулы прибыли (2.3.6)

$$\pi_{(l-1)jk} = q_{(l-1)jk}\left(f_{(l-1)j} - p_{it} - v_{(l-1)jk}\right), \qquad k = \overline{1, n_{(l-1)j}}. \qquad (2.3.8)$$

А далее действуем аналогично формулам (2.3.2) – (2.3.5) и переходим к вершинам более высокого уровня. Данный алгоритм мы повторяем для всех множеств $X_i, i > s$.

Рассмотрим фирму k из вершины $x^* = x_1^s$ и составим для неё функцию прибыли:

$$\pi_{s1k} = q_{s1k}\left(p_{s1} - \sum_{F(x_t^i)=x_1^s} p_{it} - v_{s1k}\right), \qquad k = \overline{1, n_{s1}}.$$

Используем условие отсутствия дефицита и излишков и выразим переменную p_{s1}:

$$p_{s1} = f_{s1k}\left(q_{s11}, q_{s12}, \dots, q_{s1n_{s1}}\right),$$

где f_{s1k} – линейная функция по переменным $q_{s11}, q_{s12}, \dots, q_{s1n_{s1}}$, и применим к функции прибыли необходимое условие максимума

$$\frac{\partial \pi_{s1k}}{\partial q_{s1k}} = 0, \qquad k = \overline{1, n_{s1}}.$$

В силу линейности функций $f_{s1k}, k = \overline{1, n_{s1}}$ мы получим систему с невырожденной матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix},$$

а значит, она однозначно разрешима относительно переменных $q_{s11}, q_{s12}, \dots, q_{s1n_{s1}}$.

Переходим далее к рассмотрению вершин множества X_{s-1}. Из условия (2.2.3) имеем:

$$\sum_{k=1}^{n_{(s-1)j}} q_{(s-1)jk} = Q_{(s-1)j} = Q_{s1} = \sum_{k=1}^{n_{(s-1)j}} q_{(s-1)jk}\left(p_{(s-1)1}, \dots, p_{(s-1)n_{(s-1)j}}\right),$$
$$j = \overline{1, m_{s-1}},$$

где $q_{(s-1)jk}$, $k = \overline{1, n_{(s-1)j}}$ линейно зависят от $p_{(s-1)j1}, \dots, p_{(s-1)jn_{(s-1)j}}$.

Выразим из каждого уравнения цену:

$$p_{(s-1)j} = f_{(s-1)j}\left(q_{(s-1)j1}, \dots, q_{(s-1)jn_{(s-1)j}}; p_{(s-1)1}, \dots, p_{(s-1)m_{(s-1)}}\right),$$
$$j = \overline{1, m_{s-1}}. \qquad (2.3.9)$$

Для каждой фирмы из вершин уровня $(s-1)$ выпишем функцию прибыли:

$$\pi_{(s-1)1k} = q_{(s-1)1k}\left(p_{(s-1)1} - \sum_{F(x_t^i) = x_1^{s-1}} p_{it} - v_{(s-1)1k}\right), \qquad k = \overline{1, n_{(s-1)1}};$$

$$\pi_{(s-1)2k} = q_{(s-1)2k}\left(p_{(s-1)2} - \sum_{F(x_t^i) = x_2^{s-1}} p_{it} - v_{(s-1)2k}\right), \qquad k = \overline{1, n_{(s-1)2}};$$

$$\vdots$$

$$\pi_{(s-1)m_{s-1}k} = q_{(s-1)m_{s-1}k}\left(p_{(s-1)m_{s-1}} - \sum_{F(x_t^i) = x_{m_{s-1}}^{s-1}} p_{it} - v_{(s-1)m_{s-1}k}\right),$$
$$k = \overline{1, n_{(s-1)m_{s-1}}}.$$

Заменим в каждой формуле цену $p_{(s-1)j}$ её выражением (2.3.9) и применим необходимое условие максимума. Для каждой группы равенств мы получим систему с невырожденной матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждую из систем можно однозначно разрешить относительно переменных объема $q_{(s-1)jk}$:

$$q_{(s-1)jk} = g_{(s-1)jk}\left(p_{(s-1)1}, \dots, p_{(s-1)m_{(s-1)}}, p_{it}\right),$$
$$k = \overline{1, n_{(s-1)j}}, j = \overline{1, m_{s-1}}. \tag{2.3.10}$$

Подставим данные значения в выражения (2.3.7) и полученную систему разрешим относительно переменных $p_{(s-1)j}, j = \overline{1, m_{(s-1)}}$. Наконец, вычисленные значения переменных цены подставим в выражения (2.3.10) и посчитаем значения $Q_{(s-1)j}, j = \overline{1, m_{(s-1)}}$.

Действуя аналогичным образом, мы рассмотрим вершины, находящиеся на всех уровнях от $s-2$ до второго включительно.

Для корневых вершин, т.е. вершин уровня *1*, функция прибыли фирмы k будет иметь вид:

$$\pi_{1jk} = q_{1jk}(p_{1j} - v_{1jk}), j = \overline{1, m_1}, k = \overline{1, n_{1j}}.$$

Как и для всех ранее рассмотренных уровней, на данном шаге мы имеем выражение для переменных цен $p_{1j}, j = \overline{1, m_1}$ через переменные объема q_{1jk}:

$$p_{1j} = f_{1j}\left(q_{1j1}, \dots, q_{1jn_{1j}}, p_{1i}\right). \tag{2.3.11}$$

Подставим его в формулы прибыли, применим необходимое условие максимума и разрешим полученную систему относительно переменных объема. Полученные значения подставим в выражения (2.3.11) и разрешим относительно переменных $p_{1j}, j = \overline{1, m_1}$. На данном шаге мы получили значения, которые зависят только от параметров сети поставок, нам останется только подставить все необходимые значения в выражения, двигаясь от корневых вершин к концевым. Таким образом, оптимальный поток найден.

2.4. Кооперативное решение в централизованной дистрибутивной многоуровневой сети

При построении кооперативного решения в дистрибутивной многоуровневой сети поставок будем считать, как и в главе 1, упорядоченное множество вершин графа множеством игроков, соответствующим образом упорядоченные функции прибыли – функциями выигрыша, а множества U_{ij}, определяемые формулой (1.2.1) – множествами стратегий игроков. В качестве точки статус-кво возьмем значение функции прибыли на децентрализованном решении (равновесии по Нэшу) этой же сети поставок (обозначим его через π^*). Тогда кооперативным решением в централизованной дистрибутивной многоуровневой сети поставок будем считать взвешенное арбитражное решение Нэша, которое, в свою очередь, есть решение следующей оптимизационной задачи:

$$\max_{q_{ijh}, p_{ij}} \prod_{i=1}^{l} \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{k=1}^{n_{ij}} \left(\pi_{ijk}\left(q_{ij1}, \dots, q_{ijn_{ij}}, v_{ij1}, \dots, v_{ijn_{ij}}, p_{ij}, p_{th}\right) - \pi_{ijk}^*\right)^{\alpha_{ijk}}$$

$$p_{th}\colon (i,j) \in S_h^t;$$

$$\pi_{ijk} \ge \pi_{ijk}^*, \qquad i = \overline{1,l}, \qquad j = \overline{1,m_\iota}, \qquad k = \overline{1,n_{\iota j}};$$

$$p_{lj} = a_{lj} - b_{lj} \sum_{k=1}^{n_{lj}} q_{ljk}\,, \qquad j = \overline{1,m_l};$$

$$\sum_{r=1}^{n_{th}} q_{thr} = \sum_{i,j:(i,j)\in S_h^t} \ \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk}\,, \ \ t,h\colon x_h^t \notin X_l;$$

$$q_{ijk} \ge 0, \qquad p_{ij} \ge 0, \qquad i = \overline{1,l}, \qquad j = \overline{1,m_\iota}, \qquad k = \overline{1,n_{\iota j}};$$

где α_{ijk} – заданные числа, такие, что:

$$\alpha_{ijk} > 0, \qquad \forall\, i = \overline{1,l}, \qquad \forall\, j = \overline{1,m_\iota}, \qquad \forall\, k = \overline{1,n_{\iota j}},$$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \alpha_{ijk} = 1.$$

Существование и единственность решения доказываются теоремой Нэша, т.к. произведение Нэша является непрерывной выпуклой функцией, а ограничения задают выпуклый компакт.

2.5. Численный пример и сравнение решений

Рассмотрим дистрибутивную многоуровневую сеть поставок, изображенную на Рис. 2.5.1, с параметрами, приведенными в Таблице 2.5.1.

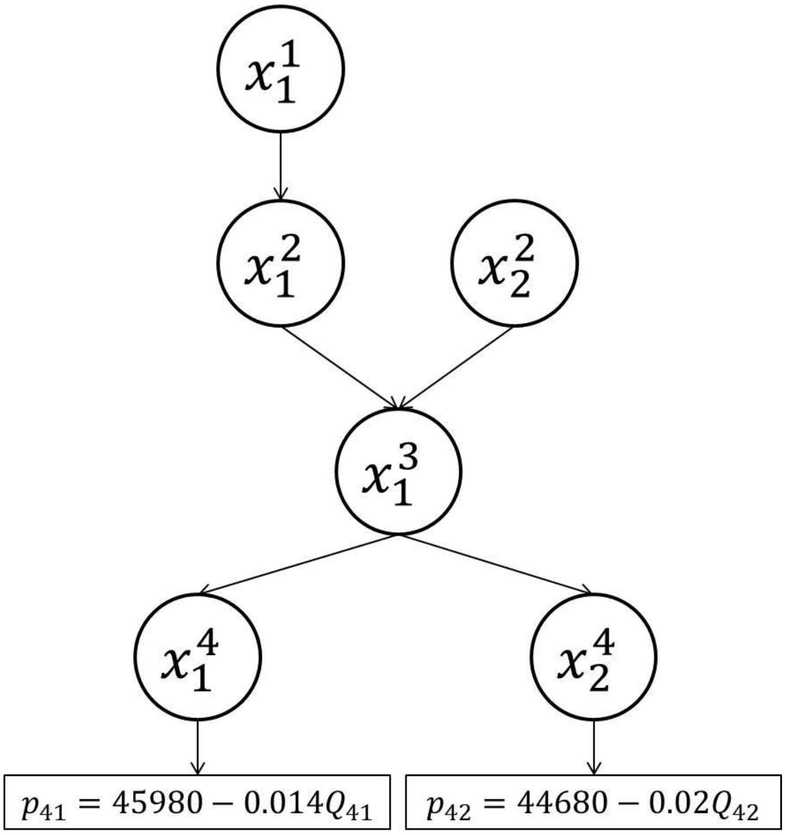

Рис. 2.5.1. Сеть поставок с дистрибутивной структурой

Таблица 2.5.1. Значение параметров сети поставок

Вершина	**Количество фирм в вершине**	**Удельные издержки**
x_1^1	*3*	$v_{111} = 10\,541$ $v_{112} = 11\,002$ $v_{113} = 9\,998$
x_1^2	*2*	$v_{211} = 4\,123$ $v_{212} = 4\,796.3$
x_2^2	*2*	$v_{221} = 15\,361.7$ $v_{222} = 14\,900.8$
x_1^3	*1*	$v_{311} = 4\,576$

x_1^4	5	$v_{411} = 2\,048.69$ $v_{412} = 2\,105.3$ $v_{413} = 1\,999.9$ $v_{414} = 1\,908.9$ $v_{415} = 2\,200$
x_2^4	4	$v_{421} = 1\,041$ $v_{422} = 1\,145.15$ $v_{423} = 1\,138.4$ $v_{424} = 1\,010.9$

Подобную сеть поставок можно встретить, например, при производстве и дистрибуции электрических гитар: в вершине x_1^1 происходит заготовка и обработка древесины; фирмы в вершине x_1^2 из поставленных древесных заготовок выстругивают корпуса будущих инструментов, а в вершине x_2^2 производят электротехнические составляющие (струны, звукосниматели, процессоры и прочее). В вершине x_1^3 происходит сборка составных частей гитар, и инструменты направляются ритейлерам в 2 разных региона.

Построим децентрализованное решение для данной дистрибутивной сети поставок.

Для концевых вершин функции прибыли фирм имеют вид:

$$\pi_{411} = q_{411}(p_{41} - p_{31} - 2048.69);$$
$$\pi_{412} = q_{412}(p_{41} - p_{31} - 2105.3);$$
$$\pi_{413} = q_{413}(p_{41} - p_{31} - 1999.9);$$
$$\pi_{414} = q_{414}(p_{41} - p_{31} - 1908.9);$$
$$\pi_{415} = q_{415}(p_{41} - p_{31} - 2200);$$
$$\pi_{421} = q_{421}(p_{42} - p_{31} - 1041);$$
$$\pi_{422} = q_{422}(p_{42} - p_{31} - 1145.15);$$
$$\pi_{423} = q_{423}(p_{42} - p_{31} - 1138.4);$$
$$\pi_{424} = q_{424}(p_{42} - p_{31} - 1010.9).$$

Подставим вместо p_{41} и p_{42} их выражения из функций спрос, применим к полученным формулам необходимое условие максимума и решим полученные системы уравнений относительно $q_{4jk}, j = \overline{1,2}, k = \overline{1,6-j}$:

$$q_{411} = 522983.93 - 11.9\, p_{31};$$

$$q_{412} = 518940.36 - 11.9\,p_{31};$$
$$q_{413} = 526468.93 - 11.9\,p_{31};$$
$$q_{414} = 532968.93 - 11.9\,p_{31};$$
$$q_{415} = 512176.07 - 11.9\,p_{31};$$

$$q_{421} = 438104.5 - 10p_{31};$$
$$q_{422} = 432897 - 10p_{31}$$
$$q_{423} = 433234.5 - 10p_{31};$$
$$q_{424} = 439609.5 - 10p_{31}.$$

Далее получаем соотношения:

$$Q_{41} = 2613538.21 - 59.52\,p_{31};$$
$$Q_{42} = 1743845.5 - 40\,p_{31},$$

из которых вместе с условием отсутствия дефицита и излишков в цепи поставок получаем:

$$p_{31} = 43782.32 - 0.01\,q_{311}.$$

Функция прибыли фирм в вершине x_1^3 имеет вид:

$$\pi_{311} = q_{311}(p_{31} - p_{21} - p_{22} - 4576);$$

а после подстановки выражения для p_{31} принимает вид:

$$\pi_{311} = q_{311}(43782.32 - 0.01\,q_{311} - p_{21} - p_{22} - 4576).$$

Применяя необходимое условие максимума и решая полученное уравнение, мы найдем, что:

$$q_{311} = 1950981.38 - 49.76(p_{22} + p_{21}).$$

Из данного соотношения и условия отсутствия дефицита и излишков мы имеем:

$$p_{21} = 39206.32 - 0.02\,Q_{21} - p_{22};$$
$$p_{22} = 39206.32 - 0.02\,Q_{22} - p_{21}.$$

Рассмотрим вершины x_1^2 и x_2^2. Функции прибыли фирм из этих вершин:

$$\pi_{211} = q_{211}(39206.32 - 0.02\,Q_{21} - p_{22} - p_{11} - 4123);$$
$$\pi_{212} = q_{212}(39206.32 - 0.02\,Q_{21} - p_{22} - p_{11} - 4796.3);$$

$$\pi_{221} = q_{221}(39206.32 - 0.02\, Q_{22} - p_{21} - p_{11} - 15361.7);$$
$$\pi_{221} = q_{222}(39206.32 - 0.02\, Q_{22} - p_{21} - p_{11} - 14900.8).$$

Далее применяем необходимое условие максимума и решаем полученные системы:

$$q_{211} = 593105.91 - 16.59(p_{22} + p_{11});$$
$$q_{212} = 559601.22 - 16.59(p_{22} + p_{11});$$

$$q_{221} = 387872.89 - 16.59\, p_{21};$$
$$q_{222} = 410808.15 - 16.59\, p_{21}.$$

Считаем значения Q_{21} и Q_{22}:

$$Q_{21} = 1152707.13 - 16.59(p_{22} + p_{11});$$
$$Q_{22} = 798681.04 - 16.59\, p_{21}.$$

И из условия, что

$$Q_{11} = Q_{21} = Q_{22},$$

получаем:

$$p_{21} = 9363.5 + 0.75\, p_{11};$$
$$p_{22} = 20035.1 - 0.25\, p_{11};$$
$$p_{11} = 19615.42 - 0.04\, Q_{11}.$$

Перейдем к рассмотрению фирм в вершине x_1^1:

$$\pi_{111} = q_{111}(19615.42 - 0.04\, Q_{11} - 10541);$$
$$\pi_{112} = q_{112}(19615.42 - 0.04\, Q_{11} - 11002);$$
$$\pi_{113} = q_{113}(19615.42 - 0.04\, Q_{11} - 9998).$$

Применяем необходимое условие максимума и решаем систему:

$$q_{111} \approx 55\,935; \quad q_{112} \approx 44\,465;$$
$$q_{113} \approx 69\,445; \; p_{11} \approx 12\,789.$$

Таким образом, равновесное решение имеет вид:

$$x_1^1: \quad \begin{gathered} q_{111} \approx 55\,935; q_{112} \approx 44\,465; q_{113} \approx 69\,445; \\ p_{11} \approx 12\,789; \end{gathered}$$

$$x_1^2:\quad \begin{gathered} q_{211} \approx 101\,675;\;\; q_{212} \approx 68\,170; \\ p_{21} \approx 18\,955; \end{gathered}$$

$$x_2^2:\quad \begin{gathered} q_{221} \approx 73\,455;\;\; q_{222} \approx 96\,390; \\ p_{22} \approx 16\,838; \end{gathered}$$

$$x_1^3:\quad \begin{gathered} q_{311} \approx 169\,845; \\ p_{31} \approx 42\,076; \end{gathered}$$

$$x_1^4:\quad \begin{gathered} q_{411} \approx 22\,082;\;\; q_{412} \approx 18\,039;\;\; q_{413} \approx 25\,567; \\ q_{414} \approx 32\,067;\;\; q_{415} \approx 11\,274; \\ p_{41} \approx 44\,434; \end{gathered}$$

$$x_2^4:\quad \begin{gathered} q_{421} \approx 17\,347;\;\; q_{422} \approx 12\,140; \\ q_{423} \approx 12\,477;\;\; q_{424} \approx 18\,852; \\ p_{42} \approx 43\,464. \end{gathered}$$

Найдем кооперативное решение для данной цепи поставок (с помощью прикладного пакета MATLAB), решив оптимизационную задачу:

$$\begin{gathered} \max_{q_{ijk},\ p_{ij}} [(q_{411}(p_{41} - p_{31} - 2048.69) - 6\,826\,733) * \\ * (q_{412}(p_{41} - p_{31} - 2105.3) - 4\,555\,492) * \\ * (q_{413}(p_{41} - p_{31} - 1999.9) - 9\,151\,547) * \\ * (q_{414}(p_{41} - p_{31} - 1908.9) - 14\,396\,278) * \\ * (q_{415}(p_{41} - p_{31} - 2200) - 1\,779\,553) * \\ * (q_{421}(p_{42} - p_{31} - 1041) - 6\,018\,404) * \\ * (q_{422}(p_{42} - p_{31} - 1145.15) - 2\,947\,374) * \\ * (q_{423}(p_{42} - p_{31} - 1138.4) - 3\,113\,536) * \\ * (q_{424}(p_{42} - p_{31} - 1010.9) - 7\,107\,997) * \\ * (q_{311}(p_{31} - p_{21} - p_{22} - 4576) - 289\,854\,521) * \\ * (q_{211}(p_{21} - p_{11} - 4123) - 207\,745\,358) * \end{gathered}$$

$$q_{212}(p_{21} - p_{11} - 4794.3) - 93\,388\,517) *$$
$$* (q_{221}(p_{22} - 15361.7) - 108\,429\,127) *$$
$$* (q_{222}(p_{22} - 14900.8) - 186\,710\,826) *$$
$$* (q_{111}(p_{11} - 10541) - 125\,747\,862) *$$
$$* (q_{112}(p_{11} - 11002) - 79\,463\,497) *$$
$$* (q_{113}(p_{11} - 9998) - 193\,829\,418)];$$

$$p_{41} = 45980 - 0.014Q_{41};$$
$$p_{42} = 44680 - 0.02Q_{42};$$
$$Q_{31} = Q_{41} + Q_{42};$$
$$Q_{21} = Q_{31} = Q_{22};$$
$$Q_{11} = Q_{21};$$
$$q_{ijk} \geq 0, \qquad p_{ij} \geq 0.$$

Решение имеет вид:

x_1^1: $$q_{111} \approx 90\,580; q_{112} \approx 71\,884; q_{113} \approx 112\,602;$$
$$p_{11} \approx 13\,655;$$

x_1^2: $$q_{211} \approx 164\,687;\ \ q_{212} \approx 110\,380;$$
$$p_{21} \approx 19\,297;$$

x_2^2: $$q_{221} \approx 119\,229;\ \ q_{222} \approx 155\,838;$$
$$p_{22} \approx 16\,271;$$

x_1^3: $$q_{311} \approx 275\,067;$$
$$p_{31} \approx 41\,198;$$

x_1^4: $$q_{411} \approx 35\,618;\ \ q_{412} \approx 29\,064;\ \ q_{413} \approx 41\,276;$$
$$q_{414} \approx 51\,849;\ \ q_{415} \approx 18\,153;$$
$$p_{41} \approx 43\,497;$$

$$x_2^4: \quad \begin{gathered} q_{421} \approx 28\,274; \;\; q_{422} \approx 19\,774; \\ q_{423} \approx 20\,323; \;\; q_{424} \approx 30\,736; \\ p_{42} \approx 42\,698. \end{gathered}$$

Вычислим значения функций прибыли на обоих решения и приведем их в одной таблице (Таблица 2.5.2):

Таблица 2.5.2. Значение прибылей участников сети поставок на равновесии по Нэшу и кооперативном решении

Вершина	Равновесие по Нэшу	Кооперативное решение
x_1^1	$\pi_{111} \approx 125\,747\,862$ $\pi_{112} \approx 79\,463\,497$ $\pi_{113} \approx 193\,829\,418$	$\pi_{111} \approx 282\,045\,368$ $\pi_{112} \approx 190\,691\,070$ $\pi_{113} \approx 411\,759\,207$
x_1^2	$\pi_{121} \approx 207\,745\,358$ $\pi_{212} \approx 93\,388\,517$	$\pi_{121} \approx 250\,219\,149$ $\pi_{212} \approx 93\,388\,618$
x_2^2	$\pi_{221} \approx 108\,429\,127$ $\pi_{222} \approx 186\,710\,826$	$\pi_{221} \approx 108\,429\,178$ $\pi_{222} \approx 213\,547\,991$
x_1^3	$\pi_{311} \approx 289\,854\,521$	$\pi_{311} \approx 289\,854\,541$
x_1^4	$\pi_{411} \approx 6\,826\,733$ $\pi_{412} \approx 4\,555\,492$ $\pi_{413} \approx 9\,151\,547$ $\pi_{414} \approx 14\,396\,278$ $\pi_{415} \approx 1\,779\,553$	$\pi_{411} \approx 8\,900\,254$ $\pi_{412} \approx 5\,617\,128$ $\pi_{413} \approx 12\,327\,778$ $\pi_{414} \approx 20\,203\,800$ $\pi_{415} \approx 1\,789\,332$
x_2^4	$\pi_{421} \approx 6\,018\,404$ $\pi_{422} \approx 2\,947\,374$ $\pi_{423} \approx 3\,113\,536$ $\pi_{424} \approx 7\,107\,997$	$\pi_{421} \approx 12\,973\,436$ $\pi_{422} \approx 7\,013\,681$ $\pi_{423} \approx 7\,345\,763$ $\pi_{424} \approx 15\,028\,067$

В данном примере кооперативное решение увеличило прибыль участников дистрибутивной сети поставок в среднем на 61%, а общая прибыль всей сети на кооперативном решении увеличилась почти в 1.5 раза (на 44%) по сравнению с децентрализованным: с 1 341 066 039 до 1 931 134 188. Также увеличилась на 16% мощность товарного потока: с

169 845 единиц на равновесии по Нэшу до 275 067 единиц при кооперации. Кроме того, цена конечного продукта при кооперации оказалась ниже, чем в децентрализованной модели. Таким образом, кооперативное решение является предпочтительнее конкурентного не только для участников дистрибутивной сети поставок, но и для конечных потребителей.

Глава 3. Решение прикладных моделей сетей поставок в условиях конкуренции и кооперации

3.1. Модель древовидной сети поставок компании X

Для исследования нами были получены данные крупного российского производителя целлюлозно-бумажной продукции, компании X.

Для построения модели и последующего анализа нами были выбраны 3 продукта Компании X:

- целлюлоза беленная лиственная,
- целлюлоза беленая хвойная,
- целлюлоза небеленая хвойная,

которые (все или некоторые из списка) производятся на двух разных Заводах А и Б в Сибири. Так как товарные потоки этих заводов не пересекаются, было принято решение для каждого завода строить свою древовидную сеть поставок.

Описание процесса производства и реализации продукции компании X:

Древовидная сеть Завода А

<u>Этап 1.</u> В лесных массивах, принадлежащих компании, происходит рубка древесины хвойных и лиственных пород. Древесина проходит первичную обработку: удаляются сучья, стволы распиливаются на размерные заготовки;

<u>Этап 2.</u> Заготовленная древесина транспортируется на Завод А в три различных цеха, занимающийся производством целлюлозы беленой лиственной, беленой хвойной и небеленой хвойной;

<u>Этап 3а.</u> Беленая лиственная целлюлоза далее доставляется до 3 различных пунктов: село Достык (Казахстан), город Замын-Ууд (Монголия), город-порт Нингбо (КНР);

<u>Этап 3б.</u> Беленая хвойная целлюлоза доставляется до 4-х пунктов: железнодорожная станция Гродеково (Россия), поселок городского типа Забайкальск (Россия), город Замын-Ууд (Монголия), порт Хуанпу (КНР);

Этап 3в. Небеленая хвойная целлюлоза доставляется до 3 пунктов: поселок городского типа Забайкальск (Россия), город Замын-Ууд (Монголия), порт Хуанпу (КНР); а также осуществляется продажа небольшими партиями покупателям в Китай, это направление мы обозначим через Прочие.

На основе данной схемы можно заключить, что сеть поставок Завода А имеет древовидную структуру, изображенную на Рис. 3.1.1.

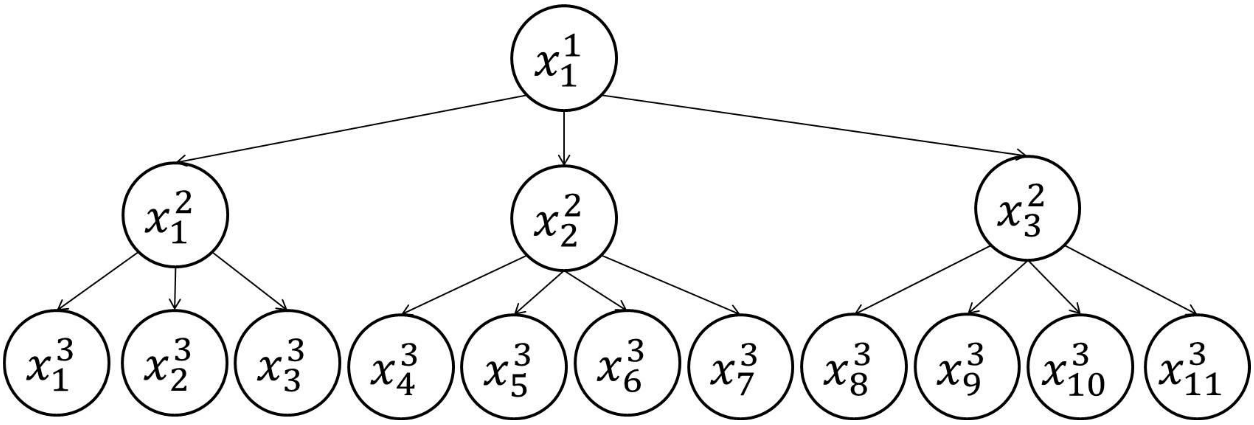

Рис. 3.1.1. Структура дерева сети поставок Завода А.

Параметры цепи поставок, полученные на основе анализа данных, приведены в Таблице 3.1.1. Затраты указаны в долларах на тонну.

Таблица 3.1.1. Параметры сети поставок Завода А

Вершина	**Количество фирм в вершине**	**Удельные издержки**
x_1^1	1	$v_{111} = 0$
x_1^2	1	$v_{211} = 356$
x_2^2	1	$v_{221} = 443$
x_3^2	1	$v_{231} = 273$
x_1^3	1	$v_{311} = 76$
x_2^3	1	$v_{321} = 59$
x_3^3	1	$v_{331} = 105$
x_4^3	1	$v_{341} = 55$
x_5^3	1	$v_{351} = 39$
x_6^3	1	$v_{361} = 62$
x_7^3	1	$v_{371} = 103$
x_8^3	1	$v_{381} = 71$
x_9^3	1	$v_{391} = 44$

x_{10}^3	1	$v_{3101} = 65$
x_{11}^3	1	$v_{3111} = 101$

Примечание: удельные затраты $v_{111} = 0$*, т.к. в предоставленных данных была информация только о полной себестоимости тонны продукции, поэтому издержки по заготовке древесины включены в издержки вершин* x_1^2, x_2^2, x_3^2.

Функции спроса концевых вершин приведены в Таблице 3.1.2.

Таблица 3.1.2. Функции спроса

Вершина	**Функция спроса**
x_1^3	$p_{31} = 452 - 0.002Q_{31}$
x_2^3	$p_{32} = 477.5 - 0.005\ Q_{32}$
x_3^3	$p_{33} = 482 - 0.0063Q_{33}$
x_4^3	$p_{34} = 536.7 - 0.0002\ Q_{34}$
x_5^3	$p_{35} = 536.7 - 0.0002Q_{35}$
x_6^3	$p_{36} = 606.08 - 0.0003Q_{36}$
x_7^3	$p_{37} = 606.08 - 0.0003Q_{37}$
x_8^3	$p_{38} = 380.7 - 0.0005Q_{38}$
x_9^3	$p_{39} = 400.6 - 0.02Q_{39}$
x_{10}^3	$p_{310} = 357.43 - 0.0049\ Q_{310}$
x_{11}^3	$p_{311} = 400.6 - 0.02Q_{311}$

Древовидная цепь Завода Б

Этап 1. В лесных массивах, принадлежащих компании, происходит рубка древесины хвойных и лиственных пород. Древесина проходит первичную обработку: удаляются сучья, стволы распиливаются на размерные заготовки;

Этап 2. Заготовленная древесина транспортируется на Завод Б в два различных цеха, занимающийся производством целлюлозы беленой лиственной и беленой хвойной;

Этап 3а. Беленая лиственная целлюлоза далее доставляется до 5 различных пунктов: село Достык (Казахстан), станция Маньчжу (КНР), станция Замын-

Ууд (Монголия), город-порт Нингбо (КНР), железнодорожная станция Алашанькоу (КНР);

Этап 3б. Беленая хвойная целлюлоза доставляется до 6 пунктов: село Достык (Казахстан), железнодорожная станция Гродеково (Россия), станция Маньчжу (КНР), станция Замын-Ууд (Монголия), порт Шанхай (КНР), железнодорожная станция Алашанькоу (КНР).

Таким образом, можно заключить, что сеть поставок Завода Б имеет древовидную структуру, изображенную на Рис. 3.1.2.

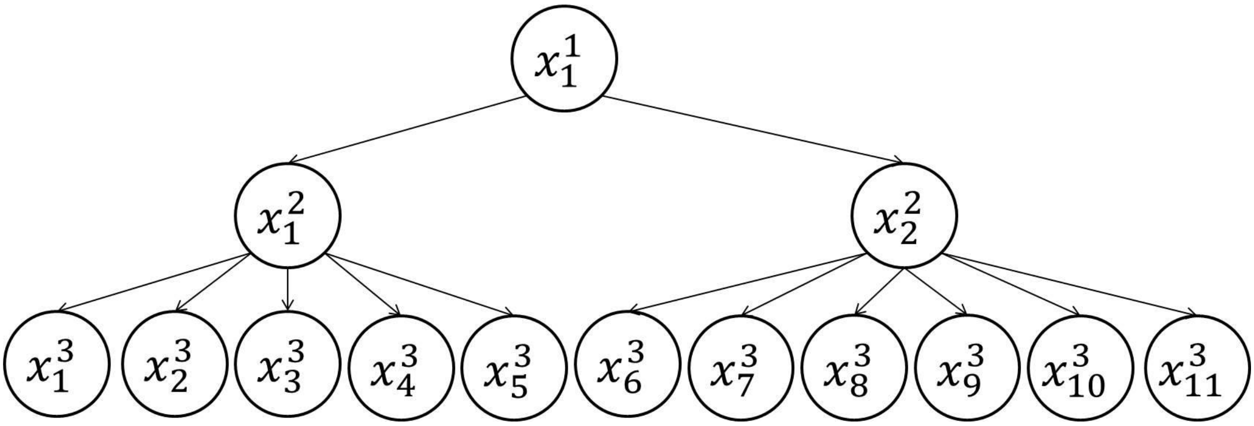

Рис. 3.1.2. Структура дерева сети поставок Завода Б.

Параметры сети поставок, полученные после анализа данных, приведены в Таблице 3.1.3.

Таблица 3.1.3. Параметры сети поставок Завода Б

Вершина	**Количество фирм в вершине**	**Удельные издержки**
x_1^1	1	$v_{111} = 0$
x_1^2	1	$v_{211} = 336$
x_2^2	1	$v_{221} = 449$
x_1^3	1	$v_{311} = 76$
x_2^3	1	$v_{321} = 40$
x_3^3	1	$v_{331} = 59$
x_4^3	1	$v_{341} = 95$
x_5^3	1	$v_{351} = 76$
x_6^3	1	$v_{361} = 80$
x_7^3	1	$v_{371} = 56$
x_8^3	1	$v_{381} = 39$

x_9^3	1	$v_{391} = 59$
x_{10}^3	1	$v_{3101} = 95$
x_{11}^3	1	$v_{3111} = 80$

Функции спроса концевых вершин приведены в Таблице 3.1.4.

Таблица 3.1.4. Функции спроса концевых рынков

Вершина	**Функция спроса**
x_1^3	$p_{31} = 473.8 - 0.0004\ Q_{31}$
x_2^3	$p_{32} = 622.39 - 0.01 Q_{32}$
x_3^3	$p_{33} = 463.48 - 0.001 Q_{33}$
x_4^3	$p_{34} = 515.9 - 0.0036\ Q_{34}$
x_5^3	$p_{35} = 505.4 - 0.0028 Q_{35}$
x_6^3	$p_{36} = 592.76 - 0.0004\ Q_{36}$
x_7^3	$p_{37} = 524.24 - 0.0001 Q_{37}$
x_8^3	$p_{38} = 558.54 - 0.0004 Q_{38}$
x_9^3	$p_{39} = 603.65 - 0.0006 Q_{39}$
x_{10}^3	$p_{310} = 54.59 - 0.0013 Q_{310}$
x_{11}^3	$p_{311} = 544.21 - 0.0001 Q_{311}$

В таблицах 3.1.5 и 3.1.6. приведены реальные значения объемов, цен и прибыли, значения при равновесном и кооперативном решениях для каждого из Заводов А и Б.

Таблица 3.1.5. Реальные значения объемов и цен Завода А, равновесное и кооперативное решения в сети поставок

		Реальные значения			Равновесное решение			Кооперативное решение		
Тип целлюлозы	Пункт назначения	Объем	Цена	Прибыль, тыс. дол	Объем.	Цена	Прибыль, тыс. дол	Объем	Цена	Прибыль, тыс. дол
Беленая лиственная	Достык	7000	438	76,65	1240	450	21,726	3974	444	47,894
	Замын-ууд	8500	435	92,4375	4746	454	184,003	7049	442	192,123
	Нингбо	3500	460	40,25	474	479	8,543	1384	473	17,025
			Итого:	**209,3375**			**214,272**			**257,041**
Беленая хвойная	Гродеково	3600	536	48,23	23476	532	801,345	77927	522	1834,858
	Забайкальск	142441	509	1 812,85	64614	524	2722,497	136744	510	3843,584
	Замын-ууд	224005	531	2 974,63	106677	570	6968,519	167484	550	7527,318
	Хуангпу	134495	561	1 885,8	45512	591	2040,008	90115	576	2692,124
			Итого:	**6722,51**			**12 532,37**			**15 897,884**
Небеленая хвойная	Прочий	44056	357	392,81	17309	371	474,054	34307	362	625,909
	Забайкальск	3951	338	33,39	2068	368	105,117	2993	353	108,281
	Замын-ууд	900	353	7,94	137	357	2,569	1180	352	16,073
	Хуангпу	1300	380	12,35	269	396	6,005	724	389	10,950
			Итого:	**446,49**			**587,745**			**761,213**

Таблица 3.1.6. Реальные значения объемов и цен Завода Б, равновесное и кооперативное решения в сети поставок

		Реальные значения			Равновесное решение			Кооперативное решение		
Тип целлюлозы	Пункт назначения	Объем	Цена	Прибыль, тыс. дол	Объем.	Цена	Прибыль, тыс. дол	Объем	Цена	Прибыль, тыс. дол
Беленая лиственная	Достык	64500	450	725,65	15433	468	402,839	38458	460	677,158
	Маньчжу	16390	429	175,74	8305	524	983,293	10425	499	973,537
	Замын-ууд	19930	444	221,2	9244	454	272,170	19255	445	378,546
	Нингбо	13000	469	152,53	4780	499	179,988	8175	486	207,696
	Алашенькоу	23000	441	253,6	7677	484	321,701	12428	470	355,459
	Итого:			**1528,72**			**2159,992**			**2592,395**
Беленая хвойная	Достык	125000	538	1 681,25	55812	568	2194,028	82488	557	2278,670
	Гродеково	3600	524	47,15	32258	522	550,061	110720	517	1297,529
	Маньчжу	106586	517	1 377,84	71436	531	3050,165	103049	518	3130,463
	Замын-ууд	115000	536	1 540,63	68669	563	3794,210	93131	549	3805,721
	Шанхай	72500	561	1 016	37079	607	2325,718	49065	591	2318,385
	Алашенькоу	45000	541	609	2483	544	37,337	57770	541	640,546
	Итого:			**6271,87**			**11951,519**			**13471,313**

Не трудно видеть, что для каждого типа продукта и для обоих заводов прибыль от реализации на равновесии по Нэшу и на кооперативном решении больше, чем реальное значение прибыли. В среднем для Завода А равновесное решение дает 40% прирост прибыли, а кооперативное – 77%; для Завода Б эти показатели равны 66 и 92% соответственно. При этом прирост достигается в большей степени за счет существенного изменения и перераспределения объемов, т.к. изменения цен можно считать несущественными – для Завода А среднее изменение составило 3%, а для завода Б – 5%.

Сравнение мощностей товарных потоков расчетных и реальных приведено в Таблице 3.1.7.

Таблица 3.1.7. Смещение объемов относительно реальных значений

Завод	Тип целлюлозы	Среднее изменение объемов продукта	
		Равновесие по Нэшу	Кооперативное решение
Завод А	Беленая лиственная	-66%	-35%
	Беленая хвойная	-47%	3%
	Небеленая хвойная	-60%	-21%
Завод Б	Беленая лиственная	-67%	-35%
	Беленая хвойная	-43%	6%

Обратим внимание, что оптимальными с точки зрения прибыли при обеих моделях поведения участников в цепи являются потоки меньшей мощности. Объяснить этот факт можно тем, что основными покупателями целлюлозы Компании X являются китайские фирмы, закупающие целлюлозу большими партиями и по оптовой цене в рамках долгосрочных договоров.

3.2. Модель дистрибутивной сети поставок компании У

Для исследования были получены и обработаны данные товарного дистрибьютора У, занимающегося дистрибуцией до ритейлеров в 11 регионах России электротехнических инструментов, материалов и комплектующих, закупаемых у четырех различных поставщиков.

Структура графа сети поставок изображена на Рис. 3.2.1.

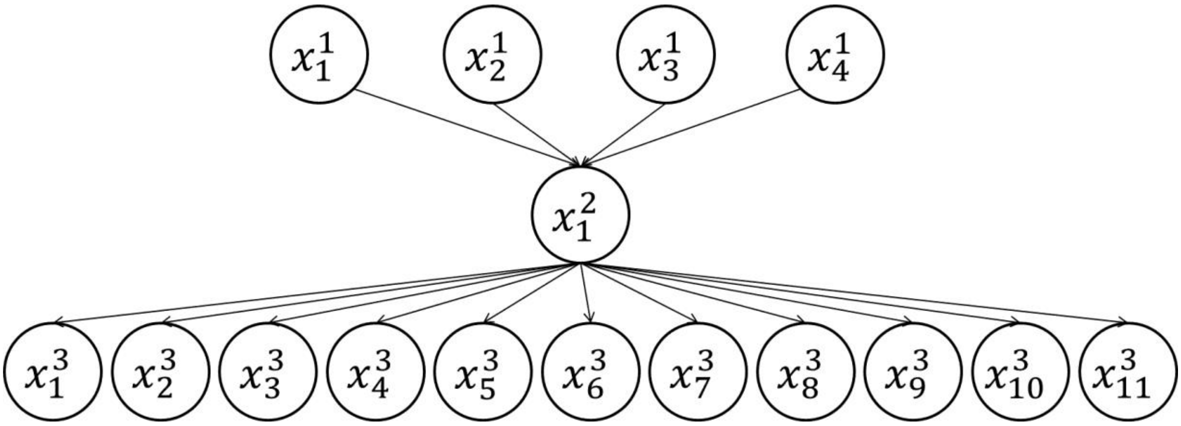

Рис. 3.2.1. Структура цепи поставок дистрибьютора

Дистрибьютор – вершина x_1^2 – закупает 4 вида электротехнических комплектующих у четырех поставщиков – вершины x_1^1, x_2^1, x_3^1 и x_4^1 – соответственно и формирует из них в некотором роде «портфели товаров», которые далее поставляет ритейлерам в регионы России (Белгородская, Владимирская, Воронежская, Калужская, Курская, Липецкая, Орловская, Рязанская, Тамбовская, Тульская и Ярославская области). Формирование портфелей обусловлено антимонопольным законом с одной стороны, и обязательством поддержания отечественных производителей – с другой.

Каждый портфель формируется из товаров поставщиков в следующей пропорции:

Таблица 3.2.1. Доли продуктов в портфеле

Поставщик	Доля товара поставщика в портфеле
x_1^1	0,222
x_2^1	0,148
x_3^1	0,444
x_4^1	0,185

Кроме того, каждая из концевых вершин состоит из группы конкурирующих ритейлеров, которые реализуют товар конечным потребителям. Количество ритейлеров в вершине, а также их издержки и функции спроса рынков приведены в Таблице 3.2.2.

Таблица 3.2.2. Значение параметров цепи для концевых вершин

Регион	Вершина	Количество ритейлеров	Удельные издержки	Функция спроса
Белгородская обл.	x_1^3	3	$v_{311} = 923$ $v_{312} = 818$ $v_{313} = 263$	$p_{31} = 59104 - 0.17Q_{31}$
Владимирская обл.	x_2^3	8	$v_{321} = 947$ $v_{322} = 554$ $v_{323} = 1060$ $v_{324} = 1049$ $v_{325} = 439$ $v_{326} = 583$ $v_{327} = 647$ $v_{328} = 735$	$p_{32} = 60339 - 0.02Q_{32}$
Воронежская обл.	x_3^3	5	$v_{331} = 513$ $v_{332} = 820$ $v_{333} = 1125$ $v_{334} = 671$ $v_{335} = 800$	$p_{33} = 59866 - 0.08Q_{33}$
Калужская обл.	x_4^3	2	$v_{341} = 847$ $v_{342} = 794$	$p_{34} = 60488 - 2.06Q_{34}$
Курская обл.	x_5^3	3	$v_{351} = 463$ $v_{352} = 278$ $v_{353} = 253$	$p_{35} = 64469 - 0.72Q_{35}$
Липецкая обл.	x_6^3	6	$v_{361} = 1265$ $v_{362} = 805$ $v_{363} = 739$ $v_{364} = 1237$ $v_{365} = 521$ $v_{366} = 919$	$p_{36} = 61802 - 0.38Q_{36}$
Орловская обл.	x_7^3	2	$v_{371} = 543$ $v_{372} = 934$	$p_{37} = 61120 - 1.44Q_{37}$
Рязанская обл.	x_8^3	5	$v_{381} = 338$ $v_{382} = 229$ $v_{383} = 470$ $v_{384} = 183$ $v_{385} = 620$	$p_{38} = 61364 - 0.23Q_{38}$

Тамбовская обл.	x_9^3	2	$v_{391} = 201$ $v_{392} = 515$	$p_{39} = 62133 - 1.9Q_{39}$
Тульская обл.	x_{10}^3	3	$v_{3101} = 609$ $v_{3102} = 652$ $v_{3103} = 736$	$p_{310} = 58236 - 0.07Q_{310}$
Ярославская обл.	x_{11}^3	3	$v_{3111} = 341$ $v_{3112} = 607$ $v_{3113} = 608$	$p_{311} = 61773 - 1.66Q_{311}$

Параметры для остальных вершин приведены в Таблице 3.2.3.

Таблица 3.2.3. Значение параметров цепи для неконцевых вершин

Вершина	**Количество фирм**	**Удельные издержки**
x_1^1	1	$v_{111} = 5742.22$
x_2^1	1	$v_{121} = 2441.19$
x_3^1	1	$v_{131} = 11399.5$
x_4^1	1	$v_{141} = 14009.81$
x_1^2	1	$v_{211} = 1340.41$

Найдем равновесное решение в данной цепи поставок.

Построим функции прибыли для концевых вершин, т.е. для ретейлеров:

$\pi_{311} = q_{311}(p_{31} - p_{21} - 923);$

$\pi_{312} = q_{312}(p_{31} - p_{21} - 818);$

$\pi_{313} = q_{313}(p_{31} - p_{21} - 263);$

$\pi_{321} = q_{321}(p_{32} - p_{21} - 947);$

$\pi_{322} = q_{322}(p_{32} - p_{21} - 554);$

$\pi_{323} = q_{323}(p_{32} - p_{21} - 1060);$

$\pi_{324} = q_{324}(p_{32} - p_{21} - 1046);$

$\pi_{325} = q_{325}(p_{32} - p_{21} - 439);$

$\pi_{326} = q_{326}(p_{32} - p_{21} - 583);$

$\pi_{327} = q_{327}(p_{32} - p_{21} - 647);$

$\pi_{328} = q_{328}(p_{32} - p_{21} - 735);$

$\pi_{331} = q_{331}(p_{33} - p_{21} - 513);$

$\pi_{332} = q_{332}(p_{33} - p_{21} - 820);$

$\pi_{333} = q_{333}(p_{33} - p_{21} - 1125);$

$\pi_{334} = q_{334}(p_{33} - p_{21} - 671);$

$\pi_{335} = q_{335}(p_{33} - p_{21} - 800);$

$\pi_{341} = q_{341}(p_{34} - p_{21} - 847);$

$\pi_{342} = q_{342}(p_{34} - p_{21} - 794);$

$\pi_{351} = q_{351}(p_{35} - p_{21} - 463);$

$$\pi_{352} = q_{35}(p_{35} - p_{21} - 278);$$
$$\pi_{353} = q_{353}(p_{35} - p_{21} - 253);$$

$$\pi_{361} = q_{361}(p_{36} - p_{21} - 1265);$$
$$\pi_{362} = q_{362}(p_{36} - p_{21} - 805);$$
$$\pi_{363} = q_{36}(p_{36} - p_{21} - 739);$$
$$\pi_{364} = q_{364}(p_{36} - p_{21} - 1237);$$
$$\pi_{365} = q_{365}(p_{36} - p_{21} - 521);$$
$$\pi_{366} = q_{366}(p_{36} - p_{21} - 919);$$

$$\pi_{371} = q_{371}(p_{37} - p_{21} - 543);$$
$$\pi_{372} = q_{372}(p_{37} - p_{21} - 934);$$

$$\pi_{381} = q_{381}(p_{38} - p_{21} - 338);$$
$$\pi_{382} = q_{382}(p_{38} - p_{21} - 229);$$
$$\pi_{383} = q_{383}(p_{38} - p_{21} - 470);$$
$$\pi_{384} = q_{384}(p_{38} - p_{21} - 183);$$
$$\pi_{385} = q_{385}(p_{38} - p_{21} - 620);$$

$$\pi_{391} = q_{391}(p_{39} - p_{21} - 201);$$
$$\pi_{392} = q_{392}(p_{39} - p_{21} - 515);$$

$$\pi_{3101} = q_{3101}(p_{310} - p_{21} - 609);$$
$$\pi_{3102} = q_{3102}(p_{310} - p_{21} - 652);$$
$$\pi_{3103} = q_{3103}(p_{310} - p_{21} - 736);$$

$$\pi_{3111} = q_{3111}(p_{311} - p_{21} - 341);$$
$$\pi_{3112} = q_{3112}(p_{311} - p_{21} - 607);$$
$$\pi_{3113} = q_{3113}(p_{311} - p_{21} - 608).$$

В данные функции подставим выражения для рыночных цен, используя функции спроса из Таблицы 3.2.1, и применим необходимое условие максимума (Приложение 1). Решаем системы относительно переменных объема (Приложение 2). Таким образом,

$$q_{211} = Q_{21} = 4660598.45 - 78.5\, p_{21}.$$

Откуда получаем, что

$$p_{21} = 59373 - 0.0127 q_{211}. \tag{3.2.1}$$

Функция прибыли фирмы-дистрибьютора:

$$\pi_{211} = q_{211}(p_{21} - p_{11} - p_{12} - p_{13} - p_{14} - 1340).$$

Подставим в неё выражение (3.2.1):

$$\pi_{211} \approx q_{211}(59373 - 0.01\, q_{211} - p_{11} - p_{12} - p_{13} - p_{14} - 1340)$$

и применим необходимое условие максимума:

$$58033 - p_{11} - p_{12} - p_{13} - p_{14} - 0.0255\, q_{211} = 0,$$

из которого получаем:

$$q_{211} = 2277706.3 - 39.25(p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14}).$$

Используя условие отсутствия дефицита и излишков, имеем соотношения:

$$q_{111} = 0.222 * q_{211} = 505650.7999 - 8.71(p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14});$$

$$q_{112} = 0.148 * q_{211} = 337100.53 - 5.8(p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14});$$

$$q_{113} = 0.444 * q_{211} = 1011301.5997 - 17.42(p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14});$$

$$q_{114} = 0.185 * q_{211} = 421375.67 - 7.26(p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14}).$$

Из каждого равенства выражаем переменные p_{11}, p_{12}, p_{13} и p_{14} соответственно:

$$p_{11} = 58033 - p_{12} - p_{13} - p_{14} - 0.1722\, q_{111};$$

$$p_{12} = 58033 - p_{11} - p_{13} - p_{14} - 0.1722\, q_{121};$$

$$p_{13} = 58033 - p_{11} - p_{12} - p_{14} - 0.1722\, q_{131}; \quad (3.2.2)$$

$$p_{14} = 58033 - p_{11} - p_{12} - p_{13} - 0.1722\, q_{141}.$$

Построим функции прибыли для фирм-поставщиков:

$$\pi_{111} = q_{111}(p_{11} - 5742);$$
$$\pi_{121} = q_{121}(p_{21} - 2441);$$
$$\pi_{131} = q_{131}(p_{31} - 11399);$$
$$\pi_{141} = q_{141}(p_{14} - 14010)$$

и подставим в них (3.2.2) (Приложение 3). Применяем необходимое условие максимума и решаем уравнения относительно объемов:

$$q_{111} = 227809.92 - 4.36(p_{12} + p_{13} + p_{14});$$
$$q_{121} = 161460.66 - 4.36(p_{11} + p_{13} + p_{14});$$
$$q_{131} = 406329.5 - 4.36(p_{11} + p_{12} + p_{14});$$

$$q_{141} = 159824.77 - 4.36(p_{11} + p_{12} + p_{13}).$$

Подставим полученные значения в равенства (3.2.2):

$$p_{11} = 31887.5 - \frac{1}{2}(p_{12} + p_{13} + p_{14});$$

$$p_{12} = 30237 - \frac{1}{2}(p_{11} + p_{13} + p_{14});$$

$$p_{13} = 34716 - \frac{1}{2}(p_{11} + p_{12} + p_{14});$$

$$p_{14} = 36021.5 - \frac{1}{2}(p_{11} + p_{12} + p_{13}).$$

Решая систему, получаем:

$$p_{11} \approx 10630;\ \ p_{12} \approx 7329;$$

$$p_{13} \approx 16287;\ \ \ p_{14} \approx 18898.$$

Далее находим значения всех остальных переменных.

Для нахождения кооперативного решения воспользуемся прикладным пакетом MATLAB, с помощью которого найдем решение оптимизационной задачи:

$$\max_{q_{ijk},\ p_{ij}}[(q_{311}(p_{31} - p_{21} - 923) - 87361)^{0.019} *$$

$$* (q_{312}(p_{31} - p_{21} - 818) - 302576)^{0.019} *$$

$$* (q_{313}(p_{31} - p_{21} - 263) - 3594527)^{0.019} *$$

$$* (q_{321}(p_{32} - p_{21} - 947) - 1137958)^{0.0007} *$$

$$* (q_{322}(p_{32} - p_{21} - 554) - 3915571)^{0.0007} *$$

$$* (q_{323}(p_{32} - p_{21} - 1060) - 72430)^{0.0007} *$$

$$* (q_{324}(p_{32} - p_{21} - 1046) - 134873)^{0.0007} *$$

$$* (q_{325}(p_{32} - p_{21} - 439) - 21711969)^{0.0007} *$$

$$* (q_{326}(p_{32} - p_{21} - 583) - 13244049)^{0.0007} *$$

$$* (q_{327}(p_{32} - p_{21} - 647) - 10166800)^{0.0007} *$$

$$* (q_{328}(p_{32} - p_{21} - 735) - 6592280)^{0.0007} *$$

$$* (q_{331}(p_{33} - p_{21} - 513) - 4985510)^{0.0011} *$$

$$* (q_{332}(p_{33} - p_{21} - 820) - 1316821)^{0.0011} *$$
$$* (q_{333}(p_{33} - p_{21} - 1125) - 4603)^{0.0011} *$$
$$* (q_{334}(p_{33} - p_{21} - 671) - 2801497)^{0.0011} *$$
$$* (q_{335}(p_{33} - p_{21} - 800) - 1480311)^{0.0011} *$$
$$* (q_{341}(p_{34} - p_{21} - 847) - 381524)^{0.0028} *$$
$$* (q_{342}(p_{34} - p_{21} - 794) - 428195)^{0.0028} *$$
$$* (q_{351}(p_{35} - p_{21} - 463) - 3875142)^{0.0019} *$$
$$* (q_{35}(p_{35} - p_{21} - 278) - 4780888)^{0.0019} *$$
$$* (q_{353}(p_{35} - p_{21} - 253) - 4910880)^{0.0019} *$$
$$* (q_{361}(p_{36} - p_{21} - 1265) - 121471)^{0.0009} *$$
$$* (q_{362}(p_{36} - p_{21} - 805) - 1198779)^{0.0009} *$$
$$* (q_{363}(p_{36} - p_{21} - 739) - 1444701)^{0.0009} *$$
$$* (q_{364}(p_{36} - p_{21} - 1237) - 155266)^{0.0009} *$$
$$* (q_{365}(p_{36} - p_{21} - 521) - 2419493)^{0.0009} *$$
$$* (q_{366}(p_{36} - p_{21} - 919) - 828314)^{0.0009} *$$
$$* (q_{371}(p_{37} - p_{21} - 543) - 1259126)^{0.0028} *$$
$$* (q_{372}(p_{37} - p_{21} - 934) - 633835)^{0.0028} *$$
$$* (q_{381}(p_{38} - p_{21} - 338) - 2177757)^{0.0011} *$$
$$* (q_{382}(p_{38} - p_{21} - 229) - 2899771)^{0.0011} *$$
$$* (q_{383}(p_{38} - p_{21} - 470) - 1442984)^{0.0011} *$$
$$* (q_{384}(p_{38} - p_{21} - 183) - 3236514)^{0.0011} *$$
$$* (q_{385}(p_{38} - p_{21} - 620) - 789291)^{0.0011} *$$
$$* (q_{391}(p_{39} - p_{21} - 201) - 1653011)^{0.0028} *$$
$$* (q_{392}(p_{39} - p_{21} - 515) - 1119008)^{0.0028} *$$
$$* (q_{3101}(p_{310} - p_{21} - 609) - 673995)^{0.0019} *$$
$$* (q_{3102}(p_{310} - p_{21} - 652) - 433140)^{0.0019} *$$
$$* (q_{3103}(p_{310} - p_{21} - 736) - 115445)^{0.0019} *$$
$$* (q_{3111}(p_{311} - p_{21} - 341) - 954613)^{0.0019} *$$
$$* (q_{3112}(p_{311} - p_{21} - 607) - 594287)^{0.0019} *$$

$$* (q_{3113}(p_{311} - p_{21} - 608) - 592804)^{0.0019} *$$

$$* (q_{211}(p_{21} - p_{11} - p_{12} - p_{13} - p_{14} - 1340) - 468832609)^{0.25} *$$

$$* (q_{111}(p_{11} - 5742) - 208187438)^{0.1526} *$$

$$* (q_{121}(p_{12} - 2441) - 138792459)^{0.1017} *$$

$$* (q_{131}(p_{13} - 11399) - 416350845)^{0.3053} *$$

$$* (q_{141}(p_{14} - 14010) - 173503931)^{0.1272}];$$

$$p_{31} = 59104 - 0.17Q_{31};$$

$$p_{32} = 60399 - 0.02Q_{32};$$

$$p_{33} = 59866 - 0.08Q_{33};$$

$$p_{34} = 60488 - 2.06Q_{34};$$

$$p_{35} = 64469 - 0.72Q_{35};$$

$$p_{36} = 61802 - 0.38Q_{36};$$

$$p_{37} = 61120 - 1.44Q_{37};$$

$$p_{38} = 61364 - 0.23Q_{38};$$

$$p_{39} = 62133 - 1.9Q_{39};$$

$$p_{310} = 58236 - 0.07Q_{310};$$

$$p_{311} = 61773 - 1.66Q_{311};$$

$$Q_{31} + \cdots + Q_{311} = Q_{21};$$

$$Q_{11} = 0.222Q_{21};$$

$$Q_{12} = 0.148Q_{21};$$

$$Q_{13} = 0.444Q_{21};$$

$$Q_{14} = 0.185Q_{21};$$

$$q_{ijk} \geq 0, \qquad p_{ij} \geq 0.$$

Значения объемов производства и цен, а также прибыли всех фирм на равновесном и кооперативном решениях приведены в Таблице 3.2.3.

Таблица 3.2.3. Равновесное и кооперативное решение в сети поставок

	Равновесное решение			Кооперативное решение		
Вершина	Объем	Цена	Прибыль	Объем	Цена	Прибыль
x_{11}	$q_{111} \approx 42592$	$p_{11} \approx 10630$	$\pi_{111} \approx 208196659$	$q_{111} \approx 47794$	$p_{11} \approx 10158$	$\pi_{111} \approx 211069495$
x_{12}	$q_{112} \approx 28394$	$p_{12} \approx 7329$	$\pi_{121} \approx 138797773$	$q_{121} \approx 31863$	$p_{12} \approx 6853$	$\pi_{121} \approx 140580514$
x_{13}	$q_{113} \approx 85183$	$p_{13} \approx 16287$	$\pi_{131} \approx 416393318$	$q_{131} \approx 95588$	$p_{13} \approx 16268$	$\pi_{131} \approx 465388411$
x_{14}	$q_{114} \approx 35493$	$p_{14} \approx 18898$	$\pi_{141} \approx 173497216$	$q_{141} \approx 39828$	$p_{14} \approx 18654$	$\pi_{141} \approx 184974523$
x_{21}	$q_{211} \approx 191854$	$p_{21} \approx 56929$	$\pi_{211} \approx 468911394$	$q_{211} \approx 215288$	$p_{21} \approx 56487$	$\pi_{211} \approx 11872330968$
x_{31}	$q_{311} \approx 716$ $q_{312} \approx 1334$ $q_{313} \approx 4599$	$p_{31} \approx 57974$	$\pi_{311} \approx 87229$ $\pi_{312} \approx 302508$ $\pi_{313} \approx 3595120$	$q_{311} \approx 672$ $q_{312} \approx 1412$ $q_{313} \approx 5369$	$p_{31} \approx 57837$	$\pi_{311} \approx 287401$ $\pi_{312} \approx 751483$ $\pi_{313} \approx 5836947$
x_{32}	$q_{321} \approx 7545$ $q_{322} \approx 7195$ $q_{323} \approx 1895$ $q_{324} \approx 2595$ $q_{325} \approx 32945$ $q_{326} \approx 25745$ $q_{327} \approx 22545$ $q_{328} \approx 18145$	$p_{32} \approx 58027$	$\pi_{321} \approx 1138533$ $\pi_{322} \approx 1035353$ $\pi_{323} \approx 71819$ $\pi_{324} \approx 134678$ $\pi_{325} \approx 21707426$ $\pi_{326} \approx 13256074$ $\pi_{327} \approx 10165517$ $\pi_{328} \approx 6584802$	$q_{321} \approx 9125$ $q_{322} \approx 8717$ $q_{323} \approx 2674$ $q_{324} \approx 3443$ $q_{325} \approx 38646$ $q_{326} \approx 30460$ $q_{327} \approx 26690$ $q_{328} \approx 21520$	$p_{32} \approx 57574$	$\pi_{321} \approx 1275419$ $\pi_{322} \approx 4647429$ $\pi_{323} \approx 72681$ $\pi_{324} \approx 140907$ $\pi_{325} \approx 25042313$ $\pi_{326} \approx 15333081$ $\pi_{327} \approx 11741319$ $\pi_{328} \approx 7580734$
x_{33}	$q_{331} \approx 7892$ $q_{332} \approx 4054$	$p_{33} \approx 58073$	$\pi_{331} \approx 4982523$ $\pi_{332} \approx 1315030$	$q_{331} \approx 9450$ $q_{332} \approx 5874$	$p_{33} \approx 57708$	$\pi_{331} \approx 6699543$ $\pi_{332} \approx 1958995$

	$q_{333} \approx 242$ $q_{334} \approx 5917$ $q_{335} \approx 4304$		$\pi_{333} \approx 4680$ $\pi_{334} \approx 2800744$ $\pi_{335} \approx 1482205$	$q_{333} \approx 390$ $q_{334} \approx 7089$ $q_{335} \approx 5170$		$\pi_{333} \approx 37520$ $\pi_{334} \approx 3903870$ $\pi_{335} \approx 2177095$
x_{34}	$q_{341} \approx 430$ $q_{342} \approx 456$	$p_{34} \approx 58662$	$\pi_{341} \approx 381380$ $\pi_{342} \approx 428353$	$q_{341} \approx 316$ $q_{342} \approx 358$	$p_{34} \approx 59099$	$\pi_{341} \approx 558523$ $\pi_{342} \approx 650770$
x_{35}	$q_{351} \approx 2320$ $q_{352} \approx 2577$ $q_{353} \approx 2612$	$p_{35} \approx 59062$	$\pi_{351} \approx 3875903$ $\pi_{352} \approx 4781901$ $\pi_{353} \approx 4911625$	$q_{351} \approx 1033$ $q_{352} \approx 1321$ $q_{353} \approx 1360$	$p_{35} \approx 61795$	$\pi_{351} \approx 5003330$ $\pi_{352} \approx 6645457$ $\pi_{353} \approx 6876004$
x_{36}	$q_{361} \approx 565$ $q_{362} \approx 1776$ $q_{363} \approx 1950$ $q_{364} \approx 639$ $q_{365} \approx 2523$ $q_{366} \approx 1476$	$p_{36} \approx 58408$	$\pi_{361} \approx 121499$ $\pi_{362} \approx 1198554$ $\pi_{363} \approx 1444446$ $\pi_{364} \approx 155227$ $\pi_{365} \approx 2419561$ $\pi_{366} \approx 827832$	$q_{361} \approx 108$ $q_{362} \approx 1386$ $q_{363} \approx 1581$ $q_{364} \approx 115$ $q_{365} \approx 2228$ $q_{366} \approx 1048$	$p_{36} \approx 59345$	$\pi_{361} \approx 172321$ $\pi_{362} \approx 2845741$ $\pi_{363} \approx 3351998$ $\pi_{364} \approx 185716$ $\pi_{365} \approx 5207520$ $\pi_{366} \approx 2032443$
x_{37}	$q_{371} \approx 935$ $q_{372} \approx 663$	$p_{37} \approx 58818$	$\pi_{371} \approx 1258819$ $\pi_{372} \approx 633835$	$q_{371} \approx 810$ $q_{372} \approx 588$	$p_{37} \approx 59107$	$\pi_{371} \approx 1681812$ $\pi_{372} \approx 992292$
x_{38}	$q_{381} \approx 3078$ $q_{382} \approx 3552$ $q_{383} \approx 2504$ $q_{384} \approx 3752$ $q_{385} \approx 1852$	$p_{38} \approx 57974$	$\pi_{381} \approx 2178481$ $\pi_{382} \approx 2901055$ $\pi_{383} \approx 1441749$ $\pi_{384} \approx 3236995$ $\pi_{385} \approx 788468$	$q_{381} \approx 3153$ $q_{382} \approx 3709$ $q_{383} \approx 2482$ $q_{384} \approx 3944$ $q_{385} \approx 1723$	$p_{38} \approx 57911$	$\pi_{381} \approx 3425495$ $\pi_{382} \approx 4433475$ $\pi_{383} \approx 2370941$ $\pi_{384} \approx 4897086$ $\pi_{385} \approx 1387695$
x_{39}	$q_{391} \approx 933$	$p_{39} \approx 58902$	$\pi_{391} \approx 1653304$	$q_{391} \approx 1115$	$p_{39} \approx 58212$	$\pi_{391} \approx 1698889$

	$q_{392} \approx 768$		$\pi_{392} \approx 1119384$	$q_{392} \approx 949$		$\pi_{392} \approx 1147671$
x_{310}	$q_{3101} \approx 3100$ $q_{3102} \approx 2486$ $q_{3103} \approx 1286$	$p_{310} \approx 57754$	$\pi_{3101} \approx 672848$ $\pi_{302} \approx 432633$ $\pi_{3103} \approx 115776$	$q_{3101} \approx 3971$ $q_{3102} \approx 3225$ $q_{3103} \approx 1771$	$p_{310} \approx 57608$	$\pi_{3101} \approx 2037296$ $\pi_{3102} \approx 1515255$ $\pi_{3103} \approx 682368$
x_{311}	$q_{3111} \approx 758$ $q_{3112} \approx 598$ $q_{3113} \approx 598$	$p_{311} \approx 58528$	$\pi_{3111} \approx 954904$ $\pi_{3112} \approx 594034$ $\pi_{3113} \approx 592838$	$q_{3111} \approx 480$ $q_{3112} \approx 407$ $q_{3113} \approx 407$	$p_{311} \approx 59625$	$\pi_{3111} \approx 1343314$ $\pi_{3112} \approx 1030373$ $\pi_{3113} \approx 1029138$

Нетрудно видеть, что при кооперации прибыль всех участников цепи больше (или, по крайней мере, не хуже), чем на равновесии по Нэшу. Проведем более подробный сравнительный анализ результатов моделирования. Ниже, в Таблице 3.2.4, приведены суммарные значения прибыли всех ритейлеров в каждом из 11 рассматриваемых регионов.

Таблица 3.2.4. Значения прибылей ритейлеров на равновесном и кооперативном решениях

Регион	Равновесие по Нэшу	Кооперативное решение	Прирост прибыли
Белгородская область	3 984 464	6 875 831	72.6%
Владимирская область	56 975 930	65 833 884	15.5%
Воронежская область	10 589 442	14 777 023	39.5%
Калужская область	809 719	1 209 308	49.3%
Курская область	13 566 910	18 524 790	36.5%
Липецкая область	6 168 024	13 795 648	123.7%
Орловская область	1 892 961	2 674 104	41.3%
Рязанская область	10 546 316	16 514 692	56.6%
Тамбовская область	2 772 019	2 846 560	2.7%
Тульская область	1 222 580	4 234 919	246.4%
Ярославская область	2 141 704	3 402 825	58.9%
Итого	**110 670 069**	**150 689 584**	**36.2%**

Увеличение прибыли при переходе к кооперации происходит довольно неравномерно (что может сказаться на мотивации некоторых регионов к кооперации), но в целом общая прибыль ритейлеров возросла более чем на 36%.

В Таблице 3.2.5 приведены значения объемов продаж, а в Таблице 3.2.6. – значения цен в каждом из регионов.

Таблица 3.2.5. Значение объемов на равновесном и кооперативном решениях

Регион	Равновесие по Нэшу	Кооперативное решение	Относительное изменение
Белгородская область	6 649	7 454	12.1%

Владимирская область	118 610	141 274	19.1%
Воронежская область	22 409	26 973	20.4%
Калужская область	886	674	-23.9%
Курская область	7 509	3 714	-50.5%
Липецкая область	8 930	6 465	-27.6%
Орловская область	1 598	1 398	-12.5%
Рязанская область	14 736	15 011	1.9%
Тамбовская область	1 700	2 064	21.4%
Тульская область	6 872	8 967	30.5%
Ярославская область	1 954	1 294	-33.8%
Итого	191 854	215 288	12.2%

Таблица 3.2.6. Значение цен на равновесном и кооперативном решениях

Регион	**Равновесие по Нэшу**	**Кооперативное решение**	**Относительное изменение**
Белгородская область	57 974	57 837	-0.2%
Владимирская область	58 027	57 574	-0.8%
Воронежская область	58 073	57 708	-0.6%
Калужская область	58 662	59 099	0.7%
Курская область	59 062	61 795	4.6%
Липецкая область	58 409	59 345	1.6%
Орловская область	58 818	59 107	0.5%
Рязанская область	57 975	57 911	-0.1%
Тамбовская область	58 902	58 212	-1.2%
Тульская область	57 755	57 608	-0.3%
Ярославская область	58 529	59 625	1.9%

В большинстве регионов кооперация сети повлекла за собой снижение цены, хотя в процентном соотношении оно довольно незначительно. Из чего мы можем сделать вывод, что увеличение прибыли произошло за счет оптимального перераспределения объемов между ритейлерами, что также вызвало увеличение мощности товарного потока в среднем на 12%.

Значения прибыли поставщиков и дистрибьютора на каждом из решений приведены в Таблице 3.2.7.

Таблица 3.2.7. Значения прибылей поставщиков и дистрибьютора на равновесном и кооперативном решениях

	Равновесие по Нэшу	**Кооперативное решение**	**Относительное изменение**
Поставщик 1	208 187 437	211 069 495	1.4%
Поставщик 2	138 792 459	140 580 514	1.3%
Поставщик 3	416 350 844	465 388 410	11.8%
Поставщик 4	173 503 931	184 974 523	6.6%
Дистрибьютор	184 974 523	468 832 610	147.5%

Прибыль поставщиков и дистрибьютора, так же как и ритейлеров, при кооперации выше, чем в децентрализованной модели, однако, можно выделить поставщиков (Поставщик 1 и 2), мотивация которых к кооперации может быть ниже, чем у остальных. В целом же прибыль всей цепи поставок при переходе от конкуренции к кооперации увеличилась на 47.5%.

Выводы

В рамках данной работы нами были рассмотрены модели конкуренции и кооперации в многоуровневых сетях поставок с различной дистрибутивной структурой.

В первую очередь нами были исследованы сети поставок с древовидной структурой. Данный тип сетей поставок был математически формализован с помощью иерархической игры на древовидном графе, на основе которой была построена математическая модель многоуровневой сети поставок с древовидной структурой. Для построенной математической модели было предложено два алгоритма нахождения объемов производства и цен всех участников сети поставок, каждый из которых соответствует одной из моделей взаимодействия участников: конкуренция и кооперация. В условиях конкуренции, т.е. когда каждый из участников действует независимо от других, преследуя лишь личные выгоды, нами предложен алгоритм нахождения абсолютного равновесия по Нэшу, обеспечивающий максимальный выигрыш каждому участнику. Кроме того, данный алгоритм при конкретизации графа сети поставок позволяет построить решение в аналитическом виде. В кооперативной модели, т.е. когда все участники образуют максимальную коалицию, преследуя цель максимизировать общую прибыль, в качестве решения было предложено взвешенное арбитражное решение Нэша, для нахождения которого сформулирована задача нелинейного программирования с нелинейными ограничениями. Для иллюстрации алгоритмов построения решений приведен численный пример древовидной сети поставок, на котором также проводится сравнение результатов моделирования.

Далее в рамках данной работы была рассмотрена проблема нахождения децентрализованного (конкурентного) и централизованного (кооперативного) решений в дистрибутивных сетях со сборочной и дистрибутивной структурами. Прежде всего, сети поставок данных типов были математически формализованы с помощью иерархической игры на графе соответствующей структуры. Нами предложены алгоритм нахождения равновесного по Нэшу решения при конкуренции между участниками сети и способ нахождения кооперативного решения в смысле взвешенного арбитражного решения Нэша. Для наглядной демонстрации алгоритмов построения указанных решений в дистрибутивных сетях в конце второй главы рассмотрен численный пример сети поставок с дистрибутивной структурой, на котором также проведено сравнение результатов численного моделирования.

В третьей главе диссертации приводятся результаты применения разработанной методологии анализа дистрибутивных сетей поставок на кейсах реальных компаний. В первом кейсе проведен анализ древовидной сети поставок на основе данных компании Х – крупного производителя целлюлозно-бумажной продукции. На основе предоставленных данных построена древовидная сеть, найдены равновесное и кооперативное решения, и проведен сравнительный анализ результатов моделирования. Во втором кейсе разработанная методология опробована на данных дистрибьютора У электротехнических товаров и комплектующих. После анализа структуры поставок дистрибьютора У, была построена дистрибутивная сеть поставок, найдены равновесное и кооперативное решения, проведен сравнительный анализ результатов численного моделирования.

Список литературы

1. Adida E., DeMiguel V. Supply Chain competition with multiple manufacturers and retailers // Operation Research, 2011. Vol. 59, №1. P.156-172.
2. Berezinets I., Loniagina Y., Nikolchenko N., Zenkevich E. Coordination versus competition in supply chains // Contributions to game theory and management, 2018. Vol. 11 (в печати).
3. Cachon G.P. Supply chain coordination with contracts // Handbooks in Operations Research & Management Science, 2003. Vol. 11. P. 227-339.
4. Carr M.S., Karmarkar U.S. Competition in multi-echelon assembly supply chains // Management Science, 2005. Vol. 51. P. 45-59
5. Cho S.-H. Horizontal mergers in multi-tier decentralized chains // Management Science, 2014. Vol. 51. P. 45-59.
6. Corbett C., Karmarkar U.S. Competition and structure in serial supply chains with deterministic demand // Management science, 2001. № 47. P. 966-978.
7. Kaya M., Ozer O. Pricing in business-to-business contracts: sharing risk, profit and information // The Oxford Handbook of Pricing Management. Oxford: Oxford University Press, 2012. P. 738-783.
8. Laseter T., Oliver K. When will supply chain management grow up? // Strategy+business, 2003. Issue 32.
9. Lonyagina Y., Nikolchenko N., Zenkevich N. Competitive and cooperative behavior in distribution networks // Contributions to Game Theory and Management, 2018. Vol. 11 (в печати).
10. Tyagi R.K. On the effect of downstream entry // Management science, 1999. № 45. P. 59-73
11. Vickers J. Competition and regulation and vertically related markets // Review of economics study, 1995. № 62. P. 1-17.
12. Zenkevich E., Lonyagina Y., Fattakhova M. Coordination in Multilevel Supply Chain // Contributions to Game Theory and Management, 2017. Vol 10, P.350-374.

13. Zhou D., Karmarkar U.S., Jiang B. Competition in multi-echelon distributive supply chains with linear demand // International Journal of Production Research, 2015. Vol. 53, № 22. P. 6787-6807
14. Ziss S. Vertical separation and horizontal mergers // Journal of industrial economics, 1995. №43. P. 63-75.
15. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. Изд. 2-е. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 432 с.

Приложения

Приложение 1

$$\begin{cases}58181 - 0.17(q_{311} + q_{312} + q_{313}) - p_{21} - 0.17q_{311} = 0;\\ 58286 - 0.17(q_{311} + q_{312} + q_{313}) - p_{21} - 0.17q_{313} = 0;\\ 58841 - 0.17(q_{311} + q_{312} + q_{313}) - p_{21} - 0.17q_{313} = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}59452 - 0.02(q_{321} + \cdots + q_{328}) - p_{21} - 0.02q_{321} = 0;\\ 59445 - 0.02(q_{321} + \cdots + q_{328}) - p_{21} - 0.02q_{322} = 0;\\ 59339 - 0.02(q_{321} + \cdots + q_{328}) - p_{21} - 0.02q_{323} = 0;\\ 59353 - 0.02(q_{321} + \cdots + q_{328}) - p_{21} - 0.02q_{324} = 0;\\ 59960 - 0.02(q_{321} + \cdots + q_{328}) - p_{21} - 0.02q_{325} = 0;\\ 59816 - 0.02(q_{321} + \cdots + q_{328}) - p_{21} - 0.02q_{326} = 0;\\ 59752 - 0.02(q_{321} + \cdots + q_{328}) - p_{21} - 0.02q_{327} = 0;\\ 59664 - 0.02(q_{321} + \cdots + q_{328}) - p_{21} - 0.02q_{328} = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}59353 - 0.08(q_{331} + q_{332} + q_{333} + q_{334} + q_{335}) - p_{21} - 0.08q_{331} = 0;\\ 59046 - 0.08(q_{331} + q_{332} + q_{333} + q_{334} + q_{335}) - p_{21} - 0.08q_{332} = 0;\\ 58741 - 0.08(q_{331} + q_{332} + q_{333} + q_{334} + q_{335}) - p_{21} - 0.08q_{333} = 0;\\ 59195 - 0.08(q_{331} + q_{332} + q_{333} + q_{334} + q_{335}) - p_{21} - 0.08q_{334} = 0;\\ 59066 - 0.08(q_{331} + q_{332} + q_{333} + q_{334} + q_{335}) - p_{21} - 0.08q_{335} = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}59641 - 2.06(q_{341} + q_{342}) - p_{21} - 2.06q_{341} = 0;\\ 59694 - 2.06(q_{341} + q_{342}) - p_{21} - 2.06q_{342} = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}64006 - 0.72(q_{351} + q_{352} + q_{353}) - p_{21} - 0.72q_{351} = 0;\\ 64191 - 0.72(q_{351} + q_{352} + q_{353}) - p_{21} - 0.72q_{352} = 0;\\ 64216 - 0.72(q_{351} + q_{352} + q_{353}) - p_{21} - 0.72q_{353} = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}60537 - 0.38(q_{361} + q_{362} + q_{363} + q_{364} + q_{365} + q_{366}) - p_{21} - 0.38q_{361} = 0;\\ 60997 - 0.38(q_{361} + q_{362} + q_{363} + q_{364} + q_{365} + q_{366}) - p_{21} - 0.38q_{362} = 0;\\ 61063 - 0.38(q_{361} + q_{362} + q_{363} + q_{364} + q_{365} + q_{366}) - p_{21} - 0.38q_{363} = 0;\\ 60565 - 0.38(q_{361} + q_{362} + q_{363} + q_{364} + q_{365} + q_{366}) - p_{21} - 0.38q_{364} = 0;\\ 61281 - 0.38(q_{361} + q_{362} + q_{363} + q_{364} + q_{365} + q_{366}) - p_{21} - 0.38q_{365} = 0;\\ 60883 - 0.38(q_{361} + q_{362} + q_{363} + q_{364} + q_{365} + q_{366}) - p_{21} - 0.38q_{366} = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}60577 - 1.44(q_{371} + q_{372}) - p_{21} - 1.44q_{371} = 0;\\ 60186 - 1.44(q_{371} + q_{372}) - p_{21} - 1.44q_{372} = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}61026 - 0.23(q_{381} + q_{382} + q_{383} + q_{384} + q_{385}) - p_{21} - 0.23q_{381} = 0;\\ 61135 - 0.23(q_{381} + q_{382} + q_{383} + q_{384} + q_{385}) - p_{21} - 0.23q_{382} = 0;\\ 60894 - 0.23(q_{381} + q_{382} + q_{383} + q_{384} + q_{385}) - p_{21} - 0.23q_{383} = 0;\\ 61181 - 0.23(q_{381} + q_{382} + q_{383} + q_{384} + q_{385}) - p_{21} - 0.23q_{384} = 0;\\ 60744 - 0.23(q_{381} + q_{382} + q_{383} + q_{384} + q_{385}) - p_{21} - 0.23q_{385} = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}61932 - 1.9(q_{391} + q_{392}) - p_{21} - 1.9q_{391} = 0;\\ 61618 - 1.9(q_{391} + q_{392}) - p_{21} - 1.9q_{392} = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}57627 - 0.07(q_{3101} + q_{3102} + q_{3103}) - p_{21} - 0.07q_{3101} = 0;\\ 57584 - 0.07(q_{3101} + q_{3102} + q_{3103}) - p_{21} - 0.07q_{3102} = 0;\\ 57500 - 0.07(q_{3101} + q_{3102} + q_{3103}) - p_{21} - 0.07q_{3103} = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}61432 - 1.66(q_{3111} + q_{3112} + q_{3113}) - p_{21} - 1.66q_{3111} = 0;\\ 61166 - 1.66(q_{3111} + q_{3112} + q_{3113}) - p_{21} - 1.66q_{3112} = 0;\\ 61165 - 1.66(q_{3111} + q_{3112} + q_{3113}) - p_{21} - 1.66q_{3113} = 0.\end{cases}$$

Приложение 2

$$q_{311} = 4435.29 - 1.47p_{21};$$
$$q_{311} = 85052.94 - 1.47p_{21};$$
$$q_{312} = 88317.65 - 1.47p_{21};$$

$$q_{321} = 323816.67 - 5.56\,p_{21};$$
$$q_{322} = 323466.67 - 5.56\,p_{21};$$
$$q_{323} = 318166.67 - 5.56\,p_{21};$$
$$q_{324} = 318866.67 - 5.56\,p_{21};$$
$$q_{325} = 49216.67 - 5.56\,p_{21};$$
$$q_{326} = 342016.67 - 5.56\,p_{21};$$
$$q_{327} = 338816.67 - 5.56\,p_{21};$$
$$q_{328} = 334416.67 - 5.56\,p_{21};$$

$$q_{331} = 126493.75 - 2.08\,p_{21};$$
$$q_{332} = 122656.25 - 2.08\,p_{21};$$
$$q_{333} = 118843.75 - 2.08\,p_{21};$$
$$q_{334} = 124518.75 - 2.08\,p_{21};$$
$$q_{335} = 122906.25 - 2.08\,p_{21};$$

$$q_{341} = 642.07 - 0.16p_{21};$$
$$q_{342} = 9667.8 - 0.16p_{21};$$

$$q_{351} = 22087.15 - 0.35\,p_{21};$$
$$q_{352} = 22344.1 - 0.35\,p_{21};$$
$$q_{353} = 22378.82 - 0.35\,p_{21};$$

$$q_{361} = 21967.29 - 0.38\,p_{21};$$
$$q_{362} = 23177.82 - 0.38\,p_{21};$$
$$q_{363} = 23351.5 - 0.38\,p_{21};$$
$$q_{364} = 22040.98 - 0.38\,p_{21};$$
$$q_{365} = 23925.19 - 0.38\,p_{21};$$
$$q_{366} = 22877.82 - 0.38\,p_{21};$$

$$q_{371} = 14112.96 - 0.2315p_{21};$$
$$q_{372} = 13841.44 - 0.2315p_{21};$$

$$q_{381} = 4330.43 - 0.72p_{21};$$
$$q_{382} = 44804.35 - 0.72p_{21};$$
$$q_{383} = 43756.52 - 0.72p_{21};$$
$$q_{384} = 45004.35 - 0.72p_{21};$$
$$q_{385} = 43104.35 - 0.72p_{21};$$

$$q_{391} = 10920.35 - 0.18\,p_{21};$$
$$q_{392} = 10755.1 - 0.18\,p_{21};$$

$$q_{3101} = 206417.86 - 3.57p_{21};$$
$$q_{3102} = 205803.57 - 3.57p_{21};$$
$$q_{3103} = 204603.57 - 3.57p_{21};$$

$$q_{3111} = 9332.1 - 0.15p_{21};$$
$$q_{3112} = 9171.84 - 0.15p_{21};$$
$$q_{3111} = 9171.24 - 0.15p_{21}.$$

Приложение 3

$$\pi_{111} = q_{111}(58033 - p_{12} - p_{13} - p_{14} - 0.1722\, q_{111} - 5742);$$

$$\pi_{121} = q_{121}(58033 - p_{11} - p_{13} - p_{14} - 0.1722\, q_{211} - 2441);$$

$$\pi_{131} = q_{131}(58033 - p_{11} - p_{12} - p_{14} - 0.1722 q_{211} - 11399);$$

$$\pi_{141} = q_{141}(58033 - p_{11} - p_{12} - p_{13} - 0.1722 q_{211} - 14010).$$